Revisão de Conceitos e Lógica de Descrição

Orientadora: Renata Wassermann
Aluno: Márcio Moretto Ribeiro

1 de Julho de 2005

1 Introdução

Nesse semestre mandamos um pedido de bolsa para fapesp, para isso definimos melhor os objetivos e motivações para a iniciação científica (como escrito abaixo) além disso conseguimos demonstrar os primeiros resultados (incluso no final).

2 Resumo

A dinâmica dos estados epistêmicos ou teoria da revisão de crenças, como é mais conhecida, foi desenvolvida para descrever como um agente deve mudar suas crenças na presença de novas informações.

Lógicas de descrição, por sua vez, têm se destacado como um importante formalismo para representação de conhecimento por serem, na prática, eficientes para fazer inferências e ao mesmo tempo suficientemente expressivas para representar conhecimento de forma adequada para uma vasta gama de aplicações, sendo úteis principalmente para descrever conceitos e ontologias. Atualmente web-semântica usa linguagens baseadas em lógicas de descrição para construir ontologias. Quando se descreve um domínio é bastante comum aparecerem inconsistências [**?**], por isso a necessidade da revisão. Esse trabalho apresenta motivações para se fazer revisão de crenças usando lógicas de descrição.

3 Motivação

Modelos clássicos de revisão de crenças [?] assumem o agente muito idealizado, por exemplo com memória e tempo de raciocínio ilimitados. Agentes reais, porém, claramente não possuem tais propriedades, logo, para se modelar revisão de crenças em agentes com recursos limitados, o modelo de alguma forma deve ser modificado [?]. Estudos com bases de crenças [?], por exemplo, tratam de conjuntos de crenças finitos, tornando a área de revisão de crenças bem mais interessante do ponto de vista computacional.

Na literatura tem sido amplamente defendido que o conhecimento deve ser representado *funcional* e não *estruturalmente* [?], para tanto um sistema de inferência deve ser especificado por uma interface do tipo *"Tell & Ask"*, em que a função *Tell* adiciona conhecimento a base de conhecimentos e *Ask* faz consultas na mesma.

Em [?] foram propostas três formas de se fazer revisão de crenças em agentes menos idealizados: a primeira seria limitando a capacidade de acesso a memória, a segunda limitando o poder de inferência de um agente e por último tolerando inconsistências. Lógicas de descrição, por serem menos expressivas do que a lógica de primeira ordem, são muitas vezes decidíveis e, na prática, inclusive computacionalmente viáveis [?]. Uma outra forma de se tentar fazer revisão em agentes reais seria diminuindo a expressividade da lógica usada (usando por exemplo alguma lógica de descrição no lugar da lógica de primeira ordem).

Por outro lado seria interessante que a interface "Tell & Ask" dos sistemas de representação de conhecimento pudessem lidar com novas entradas inconsistentes ao seu conjunto de asserções atual ou pudessem remover (interface "Tell, Ask & Forget") conhecimento de tal conjunto de uma maneira funcional. Para tanto é necessário que tais sistemas possam realizar alguma forma de revisão de crenças.

Em [?] foi proposta uma forma de interpretar revisão de conceitos, porém esse trabalho só se preocupou com a semântica [1]. Pretendemos agora fazer um estudo de revisão de conceitos do ponto de vista lógico. Descrever os conceitos usando lógica de descrição e verificar teoremas de representação.

[1] explicada no capitulo sobre *sistemas de esferas*

4 Objetivos

O objetivo da iniciação é estudar revisão de crenças, tanto em agentes idealizados como em agentes reais, estudar lógicas de descrição e tentar entender o que significaria fazer revisão de crenças em lógica de descrição, além disso discutir qual é a viabilidade computacional disso, quanto se ganha (em tempo de processamento) e quanto se perde (em expressividade). Usaremos a semântica proposta em [?], mas encararemos o problema de um ponto de vista lógico provando os teoremas de representação.

5 Resumo dos Tópicos Estudados

5.1 Lógicas de Descrição

Em vários problemas de inteligência artificial é interessante em algum ponto poder de alguma forma armazenar conhecimento adquirido e extrair conhecimento explicita ou implicitamente armazenado. Para isso é necessário um formalismo que represente simbolicamente o conhecimento e seja capaz de raciocinar sobre esse conhecimento simbolicamente armazenado, ou seja inferir consequências implícitas à base de conhecimento.

As lógicas de descrição têm se tornado um importante formalismo para representação de conhecimento, principalmente para descrever conceitos e ontologias. Dentre as vantagens de se usar lógicas de descrição para representação de conhecimento está o fato delas possuírem uma semântica bem definida (são subconjuntos da lógica de primeira ordem) e serem decidíveis.

O preço pago pela decidibilidade, porém, é uma diminuição na expressividade de tais lógicas [?]. Ultimamente muitos trabalhos tem sido apresentados no sentido de achar as lógicas mais expressivas que ainda se mantém decidíveis (para mais detalhes consulte [?]).

Seguiremos a convenção de usar palavras com letras maiúsculas (BIANCA, CAIO ...) para representar indivíduos, usaremos palavras começadas por maiúscula (Homem, Pai ...) para representar conceitos e palavras em minúsculas (temfilho ...) para papéis ("roles").

Uma base de conhecimento em lógica de descrição é tipicamente dividida em duas partes, um *TBox* que contém conhecimento dito "intencional", ou seja, define as propriedades dos conceitos e um *ABox* que contém conhecimento dito "extensional", ou conhecimentos específicos dos indivíduos.

Um *TBox* é constituído de axiomas como:

- Homem $\sqsubseteq$ Pessoa
- Pai $\equiv$ Homem $\sqcap \exists$ temfilho.Pessoa

Ou seja, todo homem é uma pessoa e um pai é um homem que tem (pelo menos) um filho que é pessoa.

A principal forma de inferência que se pode fazer em uma terminologia (*TBox*) é verificar se um determinado conceito é mais geral do que outro, ou seja se C $\sqsubseteq$ D. Tal forma de inferência é chamada de "concept subsumption". Todo sistema gerenciador de conhecimento em lógica de descrição deve ser capaz de fazer tal inferência.

Um *ABox* contém sentenças sobre indivíduos, que podem ser afirmações sobre conceitos como:

- Mulher(BIANCA)

ou sobre relações entre indivíduos ("roles") como:

- irmão(MÁRCIO, CAIO)

A principal inferência que um *ABox* deve ser capaz de realizar é chamada de *instanciação*, ou seja, verificar se determinado indivíduo é ou não instância de um conceito.

5.2 Revisão de Crenças

Revisão de crenças consiste no estudo dos *estados epistêmicos* e sua dinâmica, fornecendo uma representação para os *elementos epistêmicos* (crenças) e um *critério de racionalidade*. Nos focaremos primeiramente na representação baseada em *conjuntos de crenças* depois no modelo de *sistemas de esferas* no qual introduziremos a semântica que pretendemos usar no estudo de revisão de conceitos, para tal nos baseamos em [**?**].

5.2.1 Conjuntos de Crenças

Supomos definida uma lógica **L** com a idéia de *consequência lógica* e *consistência* definidas.

Usaremos letras maiúsculas A, B, C... para representar variáveis e e os símbolos $\top$ para uma tautologia e $\bot$ para contradição.

A *atitude epistêmica* relacionada com *conjuntos de crenças* atribui a cada sentença A umas das três possibilidades:

- A é *aceita*
- A é *rejeitada*
- A é *indeterminada*

Definição 1 *Critérios de racionalidade:*

- *O conjunto de sentenças aceitas é consistente*
- *As consequências lógicas de sentenças aceitas devem ser aceitas*

Ambas asserções são muito idealizadas, mas servem como bons pontos de partida. Posteriormente assumiremos um critério mais fraco e conseqüentemente mais palpável quando falarmos de bases de crenças.

Definição 2 *Um conjunto de sentenças K é chamado de conjunto de crenças sse:*

- *K for logicamente fechado*
- *K for consistente*

Definição 3 *Podemos escrever as atitudes epistêmicas usando a linguagem dos conjuntos de crença. Sejam K nosso conjunto de crenças e A uma sentença qualquer:*

- *A é aceita em K sse $A \in K$*
- *A é rejeitada em K sse $\neg A \in K$*
- *A é indeterminada em K sse $A \notin K$ e $\neg A \notin K$*

5.2.2 Expansão, Revisão e Contração

Voltamos agora nossa atenção para a *dinâmica dos estados epistêmicos*. Uma mudança em um *conjunto de crenças* pode ser de três tipos:

(expansão) A era indeterminada e A ou $\neg A$ passa a ser aceita

(contração) A era aceita e passa a ser indeterminada

(revisão) A era aceita e $\neg A$ passa a ser aceita

Nas próximas seções apresentamos uma justificativa para uma escolha de axiomas para *expansão, contração* e *revisão* baseados no critério de *mudança mínima* [**?**]:

> "Quando trocamos crenças devido a novas evidências, devemos manter o máximo das crenças antigas possível."

5.2.3 Expansão

A expansão modela a *mudança epistêmica* que representa aprender algo novo (que não contradiz nada em que acreditávamos anteriormente). É o caso em que A (ou $\neg A$) era indeterminado e passa a ser aceito.

Seja K nosso conjunto de crenças, ao adicionar uma sentença nova a ele devemos também adicionar todas as conseqüências dessa nova sentença junto com nossas crenças antigas, ou seja:

$$K + A = Cn(K \cup A) \tag{1}$$

5.2.4 Revisão

Devemos fazer uma revisão no nosso conjunto de crenças toda vez que passamos a acreditar em algo que contradiz com nosso estado presente de crenças, para isso temos que abandonar algumas de nossas crenças antigas (para manter a consistência), ou seja quando revisamos nosso conjunto nem todas as antigas informações são mantidas (a revisão é *não monotônica*).

Segundo o paradigma AGM uma revisão deve satisfazer:

(K^*1) $K * A$ é um conjunto de crenças

(K^*2) $A \in K * A$

(K^*3) $K * A \subseteq K + A$

(K^*4) Se $\neg A \notin K$, então $K + A \subseteq K * A$

(K^*5) Se $K * A = K_\perp$ sse $\vdash \neg A$

(K^*6) Se $\vdash A \leftrightarrow B$, então $K * A = K * B$

Esses axiomas são chamados de *axiomas básicos* da revisão. Os próximos postulados mostram a relação entre revisão e o conectivo $\wedge$:

(K^*7) $K * (A \wedge B) \subseteq (K * A) + B$

(K^*8) Se $\neg B \notin K * A$, então $(K * A) + B \subseteq K * (A \wedge B)$

5.2.5 Contração

Sempre que desejamos desistir de uma crença devemos fazer uma *contração*. Repare que se desejamos tirar uma sentença A de nosso conjunto de crenças não basta apenas tirar A, pois o conjunto remanescente pode implicar em A e simplesmente tirá-la implicaria que o novo conjunto não seria logicamente fechado.

Esses são os axiomas que,7 segundo o paradigma AGM, uma contração deve obedecer:

(K^-1) $K - A$ é um conjunto de crença

(K^-2) $K - A \subseteq K$

(K^-3) Se $A \notin K$, então $K - A = K$

(K^-4) Se $\nvdash A$, então $A \notin K - A$

(K^-5) Se $A \in K$, então $K \subseteq (K - A) + A$

(K^-6) Se $A \leftrightarrow B$, então $K - A = K - B$

Como na *revisão* esses foram os axiomas básicos e os próximos são os que dizem respeito a conjunção.

(K^-7) $(K - A) \cap (K - B) \subseteq K - (A \wedge B)$

(K^-8) Se $A \notin K - (A \wedge B)$, então $K - (A \wedge B) \subseteq K - A$

5.2.6 Teoremas de Levi e Harper

Mostramos agora dois teoremas que mostram a ligação entre *revisão* e *contração.*

Teorema 1 *Se uma contração satisfaz (K^-1)-(K^-8) então a revisão definida como:* $K * A = (K - (\neg A)) + A$ *satisfaz (K^*1)-(K^*8).*

Teorema 2 *Se uma contração satisfaz (K^*1)-(K^*8) então a revisão definida como:* $K - A = K \cap (K * \neg A)$ *satisfaz (K^-1)-(K^-8).*

Repare que só precisamos, então, definir uma das funções (contração ou revisão), pois a outra pode ser definida através de algum desses teoremas. O usual na literatura é usar a contração como primitiva.

5.2.7 Contração Partial Meet

Os postulados descritos tanto para *revisão* quanto para *contração* não caracterizam totalmente uma função, eles colocam restrições a possíveis construções. Vamos mostrar agora uma possível maneira de se construir uma *função de contração* que satisfaça os postulados propostos, primeiramente trataremos da *contração partial meet.*

Definição 4 *Seja K um conjunto de crenças, K' é chamado de subconjunto maximal que não implica A sse:*

- $K' \subseteq K$
- $A \notin K'$
- *Se* $K' \subset K'' \subseteq K$ *então* $K'' \vdash A$

Escolhendo alguns conjuntos de $K \perp A$ e fazendo a intersecção deles, temos o que chamamos de *partial meet.* Mais formalmente:

Definição 5 *Seja K um conjunto de sentenças uma função de seleção para K é uma função γ tal que para toda sentença A:*

- *Se* $K \perp A \neq \emptyset$ *então* $\gamma(K \perp A) \neq \emptyset$ *e* $\gamma(K \perp A) \subseteq K \perp A$

Definição 6 *Sejam K um conjunto de sentenças, A uma sentença e γ uma função seleção então chamamos o conjunto $\bigcap \gamma(K \bot A)$ de contração partial meet em K gerada a partir de γ.*

Teorema 3

Uma contração é partial meet se e somente se satisfizer (K^-1)-(K^-6).

Definimos agora uma escolha mais específica de conjuntos de $K \bot A$.

Definição 7 $S(K \bot A) = \{K' \in K \bot A : K'' \leqslant K' \text{ para todo } K'' \in K \bot A\}$

Onde $\leqslant$ é simplesmente uma relação definida para união de todos os conjuntos de $K \bot A$, chamamos a contração definida por $\bigcap S(K \bot A)$ de *partial meet relacional*. E então podemos mostrar que:

Teorema 4 *Uma contração é partial meet relacional se e somente se satisfizer (K^-7).*

Por fim se exigirmos que $\leqslant$ seja uma relação transitiva e chamamos essa contração de *partial meet relacional transitiva*, então temos que:

Teorema 5 *Uma contração é partial meet relacional transitiva se e somente se satisfizer (K^-8).*

5.2.8 Sistemas de Esferas

Um outro modelo para a dinâmica dos estados epistêmicos é o chamado *sistemas de esferas* [**?**]. Nesse modelo ao invés de considerarmos o conjunto das crenças consideramos os mundos possíveis onde nossas crenças são verdadeiras.

Formalmente um mundo possível é um conjunto consistente maximal ($L \bot^{\bot}$). Seja K um conjunto de crenças, representaremos por $[K]$ o conjunto dos mundos possíveis onde os elementos de K são verdade e usarem o símbolo $[\alpha]$ como abreviação para $[C(\alpha)]$.

Os sistemas de esferas nos fornecem a vantagem de fornecer uma visualização interessante ao problema de revisão de crenças.

Se $[K] \cap [\alpha] \neq \emptyset$ então existem mundos possíveis com respeito a K e a α ao mesmo tempo, ou seja, $K \cup \{\alpha\}$ é consistente, logo $K * \alpha = K + \alpha$ e isso equivale a $[K] \cap [\alpha]$. Se por outro lado $[K] \cap [\alpha] = \emptyset$ então K e α são inconsistentes, nesse caso fazer a revisão $K * \alpha$ é equivalente a escolher um subconjunto de $[\alpha]$.

O resultado mais interessante sobre sistemas de esferas é que uma revisão definida como acima é equivalente a uma revisão que satisfaça os axiomas $(K * 1)$-$(K * 6)$ [?].

Um refinamento a esse modelo é definir um conjunto de conjuntos de mundos possíveis ordenados com respeito a relação de inclusão ("fallbacks") e cujo menor elemento é $[K]$. Nesse caso uma revisão seria a intersecção entre entre $[\alpha]$ e o "fallback" mais interno possível de forma que essa intersecção não seja vazia. Tal revisão é equivalente a uma satisfazendo $(K * 1)$ - $(K * 8)$.

5.2.9 Revisão de Conceitos

Em [?] foi proposta uma forma de interpretar o sistema de esferas com o intuito de se fazer revisão de conceitos. Ao invés de pensar nas esferas como mundos possíveis com respeito a determinado conjunto de crenças elas representariam objetos possíveis de acordo com um determinado conjunto de crenças sobre o conceito.

Mais recentemente em [?] foi proposta uma semântica para interpretar a revisão levando em conta a ideia de protótipo do conceito [?]. Usando o semântica dos objetos possíveis protótipos seriam os objetos mais típicos que representam um conceito. Novamente o trabalho apresenta apenas o ponto de vista semântico, mas deixamos o estudo da lógica na revisão de protótipos para um possível trabalho futuro.

6 Resultados

6.1 Introdução

No que segue generalizamos o conceito de revisão de crenças para aplicarmos em outras lógicas, mostramos que contração partial meet satisfaz 5 dos postulados da contração apenas assumindo que a lógica usada seja tarskiana, além disso provamos o sexto postulado (recovery) para o caso particular da lógica de descrição ALC e a volta desse teorema de representação também para ALC.

6.2 Revisão de Crenças Generalizada

Seja $\mathbf{L}$ o conjunto de proposições de uma determinada lógica.

Definição 8 *Chamaremos o operador:*

$$C : 2^{\mathbf{L}} \longrightarrow 2^{\mathbf{L}} \tag{2}$$

de operador de conseqüência lógica de $\mathbf{L}$*. Seja* $K \subset \mathbf{L}$ *então chamamos* $C(K)$ *de fecho lógico de* K *(w.r.t.* $\mathbf{L}$*).*

Definição 9 *Um operador conseqüência lógica é dito tarskiano se possuir as seguintes propriedades* $\forall A \in \mathbf{L}$ *e* $\forall B \in \mathbf{L}$*:*

(inclusão) $A \subset C(A)$

(monotonicidade) $A \subset B \Rightarrow C(A) \subset C(B)$

(idempotência) $C(A) = C(C(A))$

Definição 10 *Chamamos de conjunto de crenças um conjunto* $K \subset \mathbf{L}$ *tal que* $K = C(K)$

Definição 11 *Seja* $\mathbf{K} = \{K \subset \mathbf{L} : C(K) = K\}$ *uma função:*

$$\mathbf{K} \times \mathbf{L} \longrightarrow 2^{\mathbf{L}} \tag{3}$$

$$(K, \alpha) \mapsto K - \alpha \tag{4}$$

é chamada contração sse $\forall K \in \mathbf{K}$ *e* $\forall \alpha \in \mathbf{L}$ *temos:*

1. $K - \alpha \in \mathbf{K}$
2. $K - \alpha \subseteq K$
3. *se* $\alpha \notin K \Rightarrow K - \alpha = K$
4. *se* $\alpha \notin C(\emptyset) \Rightarrow \alpha \notin K - \alpha$
5. *se* $\forall K' \subseteq \mathbf{L}\ \alpha \in C(K') \iff \beta \in C(K')$ *implica que* $K - \alpha = K - \beta$
6. $K \subseteq C(K - \alpha \cup \alpha)$

Definição 12 *Seja* $K \in \mathbf{K}$ *e* $\alpha \in \mathbf{L}$*, chamamos* $K \perp \alpha$ *o conjunto dos subconjuntos maximais de* K *que não implicam em* α *(*$\alpha \notin C(K)$*), ou seja:*

$$\left\{K' \subset K : \alpha \notin C(K') \wedge \forall K''\big(K' \subset K'' \subset K \Rightarrow \alpha \in C(K'')\big)\right\} \tag{5}$$

Definição 13 *Chamaremos função seleção (w.r.t.* C*) uma função (*γ*) tal que:*

$$\gamma = \begin{cases} \{K\} & se K \perp \alpha = \emptyset \\ \emptyset \neq K' \subseteq K \perp \alpha & caso\ contrario \end{cases} \tag{6}$$

Definição 14 *Chamaremos a função:*

$$\mathbf{K} \times \mathbf{L} \longrightarrow 2^{\mathbf{L}} \tag{7}$$

$$(K, \alpha) \mapsto \bigcap \gamma(K \perp \alpha) \tag{8}$$

de partial meet contraction (w.r.t C*).*

Lema 1 *Sejam* $K_1, K_2, ..., K_n$ *conjuntos tais que* $K_i \subset \mathbf{L}$ *e* $K_i = C(K_i)$ *para* $1 \leq i \leq n$ *então* $\bigcap_i K_i = C(\bigcap_i K_i)$*. Em outras palavras, a intersecção de conjuntos logicamente fechados é logicamente fechada.*

P.: $\bigcap_i K_i \subset C(\bigcap_i K_i)$*. Suponha por absurdo que* $\beta \in C(\bigcap_i K_i)$ *e* $\beta \notin \bigcap_i K_i$ *então* $\exists j : \beta \notin K_j$ *então como da hipotese* $K_j = C(K_j) \Rightarrow \exists \beta \notin C(K_j)$*, mas como* $\bigcap_i K_i \subset K_j \Rightarrow C(\bigcap_i K_i) \subset C(K_j)$ *o que é uma contradição pois supomos que* $\beta \in C(\bigcap_i K_i)$ *e* $\beta \notin C(K_j)$*.*
Logo para todo $\beta \in C(\bigcap_i K_i)$ *temos* $\beta \in \bigcap_i K_i$ *ou seja* $C(\bigcap_i K_i) \subset \bigcap_i K_i$ *concluimos que* $\bigcap_i K_i = C(\bigcap_i K_i)$*.*

■

Teorema 6 *Toda função partial meet contraction cujo operador consequencia lógica é tarskiano satisfaz as propriedades 1 a 5 da contração.*

P.:

1. *Seja* $K' \in K \perp \alpha$, $K' \subset C(K')$ *suponha, então, por absurdo que* $C(K') \neq K'$ *então* $\exists \beta : \beta \notin K'$ *e* $\beta \in C(K')$*.*

Tome $K' \cup \{\beta\}$ *então* $\alpha \in C(K' \cup \{\beta\})$ *ou alpha* $\notin C(K' \cup \{\beta\})$.

Suponha $\alpha \in C(K' \cup \{\beta\})$, *como* $\beta \in C(K')$ *e* $K' \subset C(K')$ *então* $K' \cup \{\beta\} \subset C(K') \Rightarrow C(K' \cup \{\beta\}) \subset C(C(K')) \Rightarrow C(K' \cup \{\beta\}) \subset C(K')$, *mas* $K' \subset K' \cup \{\beta\} \Rightarrow C(K') \subset C(K' \cup \beta)$, *logo* $C(K') = C(K' \cup \{\beta\})$ *e* $a \in C(K')$ *o que é uma contradição a definição de* $K \perp \alpha$

Suponha $\alpha \notin C(K' \cup \{\beta\})$, $K' \subset K' \cup \{\beta\} \subset C(K' \cup \{\beta\})$, *mas como* $K' \subset K \Rightarrow C(K') \subset C(K) = K$, *como* $\beta \in C(K') \Rightarrow \beta \in K$ *e então* $K' \cup \{\beta\} \subset K$ *e* $C(K' \cup \{\beta\}) \subset C(K) = K$. *Logo* $K' \subset C(K' \cup \{\beta\}) \subset K$ *e* $\alpha \notin C(K' \cup \{\beta\})$ *o que contradiz a definição de* $K \perp \alpha$.

Concluindo todo $K' \in K \perp \alpha$ *é logicamente fechado* $(K' = C(K'))$ *e do lema uma intersecção de conjuntos logicamente fechados é um conjunto logicamente fechado, logo* $\bigcap \gamma(K \perp \alpha) = C(\bigcap \gamma(K \perp \alpha))$.

2. $\forall K' \in K \perp \alpha \Rightarrow K' \subset K$ *então* $\bigcap \gamma(K \perp \alpha) \subset K$

3. $\alpha \notin K$, $K' \in K \perp \alpha$ *suponha por contradição que* $K' \neq \{K\}$ *então* $K' \subset K \subset K$ *e como* $\alpha \notin K = C(K)$, K' *não é maximal. Logo* $K \perp \alpha = \{K\}$, *nesse caso para qualquer função seleção* γ *temos* $\bigcap \gamma(\{K\}) = K$

4. $\alpha \notin C(\emptyset)$, *então* $K \perp \alpha \neq \emptyset$ *(pelo menos* $C(\emptyset) \in K \perp \alpha$*), caso contrario por definição* $\forall K' \in K \perp \alpha$ *temos* $\alpha \notin K'$, *logo* $\alpha \notin \bigcap \gamma(K \perp \alpha)$.

5. $\forall K' \alpha \in C(K') \iff \beta \in C(K')$. $K \perp \alpha = \big\{K' \subset K : \alpha \notin C(K') \wedge \forall K'' \big(K' \subset K'' \subset K \Rightarrow \alpha \in C(K'')\big)\big\} = K \perp \beta$, *então para qualquer função seleção temos* $\bigcap \gamma(K \perp \alpha) = \bigcap \gamma(K \perp \beta)$.

$\blacksquare$

6.3 Lógicas de Descrição

Definição 15 *Um TBox é uma conjunto de formulas da forma:*

<term-introduction>	*:= <concept-introduction>*
	| <role-introduction>
<concept-introduction>	*:= <atomic-concept>* $\equiv$ *<concept>*
	| <atomic-concept> $\sqsubseteq$ *<concept>*
<role-introduction>	*:= <atomic-role>* $\equiv$ *<role>*
	| <atomic-role> $\sqsubseteq$ *<role>*

Onde as definições de <concept> e <role> dependem da lógica de descrição usada.

Definição 16 *Em uma determinada lógica de descrição, dada a terminologia (TBox) T chamaremos de:*

- N_C *é o conjunto dos conceitos atômicos.*
- N_R *é o conjunto dos roles atômicos.*
- N *é o conjunto dos termos atômicos.*
- TF_C *é o conjunto dos conceitos.*
- TF_R *é o conjunto dos roles.*
- TF_T *é o conjunto dos termos.*

Definição 17 *Seja Δ um conjuto (domínio), seja T uma terminologia. Chamaremos de valorações as funções:*

$$\varepsilon : \begin{cases} TF_C \longrightarrow 2^{\Delta} \\ TF_R \longrightarrow 2^{\Delta \times \Delta} \end{cases} \tag{9}$$

6.3.1 Lógica *ALC*

Definição 18 *Na lógica ALC os <roles> são todos atômicos e os conceitos são definidos como:*

<concept> := *<atomic-concept>*
| *<universal-concept>*
| *<bottom concept>*
| ¬ *<concept>*
| *<concept>* ⊓ *<concept>*
| ∀ *<role>*.*<concept>*
| ∃ *<role>*.*<concept>*
| *<concept>* ⊔ *<concept>*

Definição 19 *Uma valoração em ALC é chamada de extensão sse:*

- $\varepsilon(\top) = \Delta$
- $\varepsilon(\bot) = \emptyset$
- $\varepsilon(\neg C) = \Delta \setminus \varepsilon(C)$
- $\varepsilon(C \sqcap D) = \varepsilon(C) \cap \varepsilon(D)$
- $\varepsilon(\forall R.C) = \big\{a \in \Delta : \forall b\big((a,b) \in R \rightarrow b \in \varepsilon(C)\big)\big\}$
- $\varepsilon(\exists R.C) = \big\{a \in \Delta : \exists b\big((a,b) \in R \wedge b \in \varepsilon(C)\big)\big\}$
- $\varepsilon(C \sqcup D) = \varepsilon(C) \cup \varepsilon(D)$

Definição 20 *Seja T uma terminologia, Δ um domínio e ε uma extensão, $< \Delta, \varepsilon >$ é chamada interpretação com respeito a T sse:*

- *para cada $a \equiv t \in T$ temos $\varepsilon(a) = \varepsilon(t)$*
- *para cada $a \sqsubseteq t \in T$ temos $\varepsilon(a) \subset \varepsilon(t)$.*

Definição 21 *Dois termos $t, t' \in TF_T$ são ditos equivalentes (w.r.t. T) sse para qualquer interpretação de T $\varepsilon(t) = \varepsilon(t')$.*

Definição 22 *Um termo $t \in TF_T$ é dito incoerente (w.r.t. T) sse para qualquer interpretação de T $\varepsilon(t) = \emptyset$.*

Definição 23 *Sejam $t, t' \in TF_T$ escrevemos $t \sqsubseteq_T t'$ sse para toda interpretação de T temos $\varepsilon(t) \subset \varepsilon(t')$, e dizemos que essa formula é consequência lógica de T.*

Definição 24 *Seja T uma terminologia chamaremos o conjunto das consequências lógicas de T de $C_{ALC}(T)$. Se $A \sqsubseteq B \in C_{ALC}(T)$ escreveremos $T \vdash A \sqsubseteq B$.*

Corolário 1 *Toda interpretação I de $C_{ALC}(T)$ é uma interpretação de T.*

Corolário 2 *O operador C_{ALC} é um operador tarskiano.*

Definição 25 *Sejam T e T' duas terminologias, dizemos que elas são equivalentes sse para toda interpretação I de T existe uma interpretação I' de T' tal que: $\forall t \in TF_T \; t^I = t^{I'}$.*

Lema 2 *Seja T' um conjunto de fórmulas do tipo:*

<*concept*> $\equiv$ <*concept*>

<*concept*> $\sqsubseteq$ <*concept*>

existe uma terminologia T equivalente a T'[2].

P.: *Em T' substitua $C \equiv D$ por $A \equiv C$ e $A \equiv D$ e tambem $C \sqsubseteq D$ por $A \equiv C$ e $A \sqsubseteq D$.*

■

Lema 3 *Seja T uma terminologia então existe T' equivalente a T sem equivalencias (só com $\sqsubseteq$ sem $\equiv$).*

P.: *Para cada $C \equiv D \in T$, tire essa formula e ponha $C \sqsubseteq D$ e $D \sqsubseteq C$ em T'.*

■

Lema 4 *As tres afirmações abaixo são equivalentes:*

i) $A \sqsubseteq B \in T$

ii) $(A \sqcap \neg B)^I = \emptyset$ *para toda interpretação I de T.*

iii) $(\neg A \sqcup B)^I = \Delta^I$ *para toda interpretação I de T.*

[2] Chamaremos formulas como T' tambem de terminologia para facilitar

P.:

i $\Rightarrow$ ii) *suponha $A \sqsubseteq B \in T$ então para toda interpretação I de T temos $A^I \subseteq B^I$, então tome $\alpha \in \Delta^I$ suponha $\alpha \in A^I$ então $\alpha \in B^I$, mas nesse caso $\alpha \notin \Delta^I \setminus B^I$, logo $A^I \cap \Delta^I \setminus B^I = \emptyset$ pou seja $(A \sqcap \neg B)^I = \emptyset$.*

ii $\Rightarrow$ iii) *suponha agora $(A \sqcap \neg B)^I = \emptyset$ para todo I de T. Então $A^I \cap \Delta^I \setminus B^I$ logo $\alpha \in \Delta^I \setminus (A^I \cap \Delta^I \setminus B^I) = \Delta^I \setminus A^I \cup B^I = (\neg A \sqcup B)^I$.*

iii $\Rightarrow$ i) *suponha então $(\neg A \sqcup B)^I = \Delta^I$ qualquer interpretação I de T. Tome $\alpha \in \Delta^I$, se $\alpha \in A^I$, então $\alpha \notin \Delta^I \setminus A^I$, mas $\alpha \in \Delta^I \setminus A^I \cup B^I$, logo $\alpha \in B$ e $A^I \subseteq B^I$.*

■

Corolário 3 *Se $A \sqsubseteq B \in T$ então $T \vdash E \sqsubseteq \neg A \sqcup B$, para qualquer $E \in TF_T$.*

Corolário 4 *Se $A \sqsubseteq B \in T$ então $T \vdash A \sqcap \neg B \sqsubseteq E$, para qualquer $E \in TF_T$.*

Lema 5 *Seja T uma terminologia tal que $T \vdash A \sqsubseteq B$ e $T \vdash (\neg A \sqcup B) \sqsubseteq \bot$ então T é insatisfazivel.*

P.: *Como $T \vdash A \sqsubseteq B$ de 4 temos $(\neg A \sqcup B)^I = \Delta^I$ para todo I de T, mas se $T \vdash \neg A \sqcup B \sqsubseteq \bot$ então para todo I de T temos $(\neg A \sqcup B)^I \subseteq \emptyset$, logo $\Delta^I = \emptyset$, ou seja T é insatisfazivel.*

■

Lema 6 *Seja T uma terminologia, se $A \sqsubseteq B \in T$ e $(\neg A \sqcup B) \sqsubseteq (\neg E \sqcup F) \in T$ então $T \vdash E \sqsubseteq F$.*

P.: *pa todo I de T temos $(\neg A \sqcup B)^I = \Delta^I$, mas para todo I de T $(\neg A \sqcup B)^I \subseteq (\neg E \sqcup F)^I$, logo $(\neg E \sqcup F)^I = \Delta^I$ e $T \vdash E \sqsubseteq F$.*

■

Corolário 5 *$T \cup A \sqsubseteq B \vdash E \sqsubseteq F$ então $T \vdash \neg A \sqcup B \sqsubseteq \neg E \sqcup F$.*

P.: *para todo I de T se $(\neg A \sqcup B)^I = \Delta^I$ então $(\neg E \sqcup F)^I = \Delta^I$. Para todo I ou $(\neg A \sqcup B)^I = \Delta^I$ ou $(A \sqcap \neg B)^I = \Delta^I$, nesse caso para to I de T $(\neg E \sqcup F)^I = \Delta^I$, logo $((A \sqcap \neg B) \sqcup (\neg E \sqcup F))^I = \Delta^I$.*

$\blacksquare$

Teorema 7 *Uma partial meet contraction (w.r.t. a C_{ALC}) satisfaz a propriedade 6 da contração.*

P.: *Devemos provar que $T \subseteq C(\bigcap \gamma(T \perp A \sqsubseteq B \cup \{A \sqsubseteq B\})$. Suponha $E \sqsubseteq F \in T$ de 3 temos $\neg A \sqcup B \sqsubseteq \neg E \sqcup F \in T$, seja $T' \subseteq T \perp A \sqsubseteq B$, suponha por absurdo $\neg A \sqcup B \sqsubseteq \neg E \sqcup F \notin T'$, pela maximalidade de T' temos $(A \sqcap \neg B) \sqcup (\neg E \sqcup F) \sqsubseteq \neg A \sqcup B \in T'$, mas repare que para qualquer interpretação I vale que $(((\neg A \sqcup B) \sqcap (E \sqcap \neg F)) \sqcup (\neg A \sqcup B))^I \subseteq (\neg A \sqcup B)^I$ em particular isso vale para todo I de T ou seja essa fórmula pertence a T e logo $A \sqsubseteq B \in T'$. Como chegamos em uma contradição temos que $\neg A \sqcup B \sqsubseteq \neg E \sqcup F \in T'$ para todo $T' \in T \perp A \sqsubseteq B$, então $\neg A \sqcup B \sqsubseteq \neg E \sqcup F \in \bigcap \gamma(T \perp A \sqsubseteq B)$ e portanto $E \sqsubseteq F \in C(\bigcap \gamma(T \perp A \sqsubseteq B) \cup \{A \sqsubseteq\})$*

$\blacksquare$

Lema 7 *Seja K um conjunto de crenças (com respeito a algum operador consequcia lógicaque satisfaça as 6 propriedades da contração) e seja A uma proposição dessa lógica. Se $K' \in K \perp A$, então $K' \in K \perp B$ para qualquer $B \in K$ talque $B \notin K'$*

$\square$

Teorema 8 *Se $T - A \subseteq B$ satisfaz os 6 postulados da contração então $T - (A \sqsubseteq B)$ é uma partial meet contraction.*

P.: *Devemos escolher uma função γ tal que:*

i) $\gamma(T \perp (A \sqsubseteq B)) = \{T\}$ *se* $T \perp A \sqsubseteq B = \emptyset$

ii) $\gamma T \perp (A \sqsubseteq B)) \neq \emptyset$ *caso contrario*

iii) $\bigcap \gamma(T \perp (A \sqsubseteq B)) = K - A \sqsubseteq B$

Para isso escolhemos:

$$\gamma(T\bot(A \sqsubseteq B)) = \begin{cases} \{T\} & se\ T\bot(A \sqsubseteq B) = \emptyset \\ \{T' \in T\bot A \sqsubseteq B : (T - (A \sqsubseteq B)) \subseteq T'\} & caso\ contrario \end{cases} \tag{10}$$

Resta provar que essa escolha satisfaz as tres propriedades acima:

i) *Vale trivialmente.*

ii) *Se* $\vdash A \sqsubseteq B$ *então* $T\bot(A \sqsubseteq B) = \emptyset$, *logo quando* $T\bot(A \sqsubseteq B) \neq \emptyset$ *temos* $\nvdash A \sqsubseteq B$ *e portanto da propriedade 4* $A \sqsubseteq B \notin T - (A \sqsubseteq B)$ *e logo existe* $\emptyset \neq T' \in T\bot(A \sqsubseteq B)$ *com* $T - (A \sqsubseteq B) \subseteq T'$

iii) $T - (A \sqsubseteq B) \subseteq \bigcap \gamma(T\bot(A \sqsubseteq B))$ *da definição de* γ. *Suponha, então,* $E \sqsubseteq F \notin T$, *queremos mostrar que nesse caso* $E \sqsubseteq F \notin \bigcap \gamma(T\bot(A \sqsubseteq B))$, *como isso é obvio quando* $E \sqsubseteq F \notin T$ *tomemos* $E \sqsubseteq F \in T$. *Agora basta achar* $T' \in T\bot(A \sqsubseteq B)$ *com* $T - (A \sqsubseteq B) \subseteq T'$ *e* $B \notin T'$. *Se* $A \sqsubseteq B \notin T$, *então da propriedade 3* $T - (A \sqsubseteq B) = T$ *e temos a nossa inclusão então tomemos* $A \sqsubseteq B \in T$. *Da propriedade 6 temos* $T - (A \sqsubseteq B) \cup \{A \sqsubseteq B\} \vdash E \sqsubseteq F$ *do lema 5 temos que* $T - (A \sqsubseteq B) \cup \neg A \sqcup B \sqsubseteq \bot \nvdash E \sqsubseteq F$, *logo* $A \sqcap \neg B \sqsubseteq \neg E \sqcup F \notin T - (A \sqsubseteq B)$. *Então existe* $T' \in T\bot(A \sqcap \neg B \sqsubseteq \neg E \sqcup F)$ *com* $T - (A \subseteq B) \subseteq T'$, *mas* $A \sqcap \neg B \sqsubseteq \neg E \sqcup F \notin T'$ *logo, pelo corolário 3* $E \sqsubseteq F \notin T'$, *então pelo lema 7 temos* $T' \in T\bot(A \sqsubseteq B)$.

■