Perturbações Cosmológicas e Criação de Partículas

Marcio Guilherme Bronzato de Avellar*, Luis Raul Weber Abramo◇
* marcavel@cecm.usp.br - Curso de Ciências Moleculares, Universidade de São Paulo
◇abramo@fma.if.usp.br - Instituto de Física, Universidade de São Paulo

Introdução

A teoria das perturbações gravitacionais linearizadas, ou seja, perturbações cosmológicas, em um universo que se expande é um ponto fundamental da cosmologia moderna. Ela é usada para descrever o crescimento de estruturas no universo ou calcular as flutuações da radiação de fundo em microondas, entre outros [1].

A radiação cósmica de fundo nos dá a melhor evidência [1],[3], se assim podemos dizer, de que o universo era muito homogêneo e isotrópico em sua infância, uma vez que as flutuações em temperatura são da ordem de 10^{-4}. Essas flutuações são relacionadas com perturbações na densidade que por sua vez são consequências das instabilidades gravitacionais. Isso porque uma porção mais densa exerce uma força gravitacional mais forte sobre a matéria em sua volta e assim, com o passar do tempo, a perturbação cresce. Num universo que se expande, esse efeito será dramaticamente diminuído, homogeneizando e isotropizando o universo.

Nosso trabalho aqui é estudar a origem quântica das flutuações, mais especificamente, achar a variação de segunda ordem da ação e entender o processo de quantização da mesma, mostrando que isso leva à criação de partículas, [1],[2].

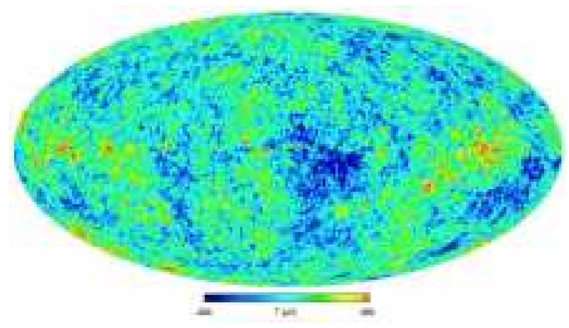

Figura 1: RCFM. Crédito: WMAP Science Team/NASA.

As equações básicas

O elemento de linha do "background" é:

$$ds^2 = g^{(0)}_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = a^2(\eta)(d\eta^2 - \gamma_{ij}dx^i dx^j)$$

onde η é o tempo conforme (coordenada que "retira" os efeitos da expansão do universo das medidas no espaço-tempo) e a métrica é a de Friedmann-Robertson-Walker.

Resolvendo as equações de Einstein chegamos a soluções para um universo "ideal".

Para que nosso universo seja mais realístico, vamos inserir perturbações na métrica, uma vez que é a métrica que descreve a geometria do universo, que está intimamente ligada à gravidade. Assim, podemos relacionar as perturbações da métrica com as instabilidades gravitacionais citadas acima. Desse modo,

$$ds^2 = g^{(0)}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \delta g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu .$$

Suporemos perturbações escalares [1]:

$$\delta g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2\phi & -B_{|i} \\ -B_{|i} & 2(\psi\gamma_{ij} - E_{|ij}) \end{pmatrix}$$

e assim

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[(1+2\phi)d\eta^2 - 2B_{|i}dx^i d\eta - [(1-2\psi)\gamma_{ij} + 2E_{|ij}]dx^i dx^j\right] .$$

Teoria quântica de perturbações

Essa teoria envolve a quantização simultânea da métrica e das flutuações da matéria, o que so é possível num universo em expansão. Quantizar os campos de matéria nesse tipo de "background" leva, em geral, à produção de partículas e esse processo é a base para a formação de estruturas num universo inflacionário.

As equações de movimento das perturbações de primeira ordem são dadas pela ação de segunda ordem. No formalismo ADM conseguimos obter:

$$\delta_2 S = \frac{1}{2}\int\left[v'^2 - v_{,i}v_{,i} + \frac{z''}{z}v^2 + \frac{1}{3l^2}\sum_{i=1}^{4} D_i\right]d^4x,\ z = \frac{a\varphi_0'}{H},$$

onde v é um potencial invariante de gauge sujeito ao vínculo $\psi' + H\phi = \frac{3}{2}l^2\varphi_0'\delta\varphi$. Os termos D_i são termos de derivadas totais e não afetam a equação de movimento.

O primeiro passo para a quantização do potencial v é escrever o momento canônico conjugado a v, $\pi(\eta, x) = \frac{\partial L}{\partial v'} = v'(\eta, x)$, e escrever o hamiltoniano:

$$H = \int(v'\pi - L)d^3x = \frac{1}{2}\int\left[\pi^2 + v_{,i}v_{,i} - \frac{z''}{z}v^2\right]d^3x.$$

A equação de movimento para o campo v é obtida variando a equação de $\delta_2 S$ com respeito a v, lembrando que na teoria quântica as variáveis v e π se tornam operadores.

Na representação de Heisenberg os estados são independentes do tempo e a dependência temporal vem dos operadores. Então vamos expandir o operador $\hat{v}$ sobre uma base completa e ortonormal de soluções da equação de evolução do campo. Essas soluções serão denotadas por $v(x, \eta) \sim \psi_J(x)v^*_J(\eta)$ onde o índice J representa o J-ésimo modo de Fourier da expansão sobre o conjunto da base e ψ_J são as auto-funções do operador $\Delta = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x^{i2}}$ com autovalores k_J^2. Logo, satisfaz $\Delta\psi_J = -k_J^2\psi_J$.

No caso particular de um universo plano podemos tomar uma base de ondas planas, de modo que

$$v(x, \eta) = \sum_k v_k(\eta)\psi_k\,,\ \psi_k = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}e^{ikx}.$$

Substituindo esse ansatz na equação de campo obtemos:

$$v_k''(\eta) + k_k^2 v_k(\eta) - \frac{z''}{z}v_k(\eta) \equiv v_k''(\eta) + E_k^2 v_k(\eta) = 0.$$

As frequências das soluções dessa equação são dependentes do tempo pois $m^2 = \frac{z''}{z}$. Quando quantizamos as perturbações de um espaço-tempo curvo, o "background" nos dá uma direção distinta do tempo mas a noção de modos com frequência positiva não é um invariante temporal. Desse modo, não é possível ter uma única definição de vácuo.

Então, para um tempo η_0, podemos achar uma combinação de soluções da equação 20, que também é uma solução, que é de freqüência positiva se impusermos as condições iniciais

$$v_k(\eta_0) = E^{-\frac{1}{2}}(\eta_0),\ v_k'(\eta_0) = iE^{\frac{1}{2}}(\eta_0).$$

Desse modo, podemos definir um estado de vácuo $|0_{\eta_0}\rangle \equiv |\psi_0\rangle$:

$$a_k^-|0_{\eta_0}\rangle = 0,\ \forall k.$$

Um observador em η_0 verá o estado acima definido como vazio de partículas, mas porque em um tempo $\eta_1 > \eta_0$ os modos que são de frequência positiva deixam de sê-lo, um observador definirá o estado $|\psi_1\rangle$ como vazio de partículas, esse estado satisfazendo:

$$b_k^-|\psi_1\rangle = 0,\ \forall k.$$

Os operados a_k^- e b_k^- são operados de aniquilação de partículas e os operadores a_k^+ e b_k^+ são operadores de criação de partículas.

Agora, se denotarmos os modos de frequência positiva e negativa em um tempo η_i por $v_k^{(i)+}$ e $v_k^{(i)-}$ respectivamente, então em termos da discussão acima teremos

$$v_k^{(1)+} = \alpha_k v_k^{(0)+} + \beta_k v_k^{(0)-},\ v_k^{(1)-} = \alpha_k^* v_k^{(0)+} + \beta_k^* v_k^{(0)-},\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,$$

onde

$$\alpha_k = \langle v_k^{(0)+}, v_k^{(1)+}\rangle\ \beta_k = \langle v_k^{(0)-}, v_k^{(1)-}\rangle.$$

Agora podemos escrever os operadores $\hat{a}^+$ e $\hat{a}^-$ em termos de $\hat{b}^+$ e $\hat{b}^-$ e vice-versa, de modo que o observador em η_1 definirá o operador de número de partículas $\hat{N}_k^1 = \hat{b}_k^+\hat{b}_k^-$ que, aplicado no estado ψ_0, dará um número não nulo de partículas:

$$\langle\psi_0|\hat{N}_k^1|\psi_0\rangle = |\beta_k|^2.$$

O que acabamos de mostrar foi que o campo escalar causa a produção de partículas a partir de um estado inicial de vácuo. Isso, em um modelo inflacionário de universo, levará à formação de estruturas no universo presente.

Conclusões

Apesar de o espectro de potências calculado para um modelo inflacionário com o potencial $V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$ não levar a inconsistências com o que tiramos das observações, existem certos incômodos com tudo isso [2]. Assumimos que o campo quantizado v começa em algum tempo inicial t_i e que o modelo, aplicado ao cenário inflacionário, é "independente" da escolha do estado de vácuo. Ora, qual é o tempo t_i? Qual, dos estados de vácuo possíveis, deve ser escolhido?

Essas perguntas são pertinentes quando se percebe que, se a inflação durar apenas um pouco mais que o tempo mínimo necessário para que o mecanismo da inflação assegure a resolução do problema do horizonte e forneça um mecanismo de geração causal das anisotropias da RCFM, os correspondentes comprimentos de onda dessas anisotropias serão menores que a escala de comprimento de Planck (escalas onde a Mecânica Quântica e a Relatividade Geral se unem numa Gravidade Quântica) no início do período inflacionário.

E daí? Daí que pode-se perguntar o quão robustas são as previsões da cosmologia inflacionária contra o efeito da "física" trans-planckiana. Isso quer dizer: o quão sensível é o espectro produzido pela inflação às mudanças em uma escala tão pequena como essa?

Usualmente, para modelar esses possíveis efeitos usa-se uma relação de dispersão modificada [2], de modo que nossa equação de movimento torna-se

$$v_k'' + \left[k_{eff}^2(k, \eta) - \frac{a''}{a}\right]v_k = 0$$

onde $k_{eff}^2(k, \eta) \equiv a^2(\eta)\omega^2\left(\frac{k}{a(\eta)}\right)$.

Assim, é possível detectar nas anisotropias da RCFM os efeitos, nos primórdios do universo, de uma era na qual a Mecânica Quântica e a Relatividade Geral eram igualmente importantes, analisando as mudanças no espectro de potências das flutuações quânticas causadas por modificações nas relações de dispersão das soluções da equação de movimento.

Essa modelagem pode, em princípio, responder aquelas duas perguntas iniciais, principalmente no que se refere à escolha do vácuo. Entretanto, deve-se notar que essas relações de dispersão modificadas são absolutamente "ad hoc", sem uma base sólida, já que não temos uma gravitação quântica desenvolvida. Ou ainda, pode-se ter frequências complexas no início do período inflacionário em escalas relevantes à cosmologia, ou seja, para a formação de estruturas, o que é inconsistente.

Agradecimento

Este trabalho foi financiado pelo Conselho Nacional de Ciência e Tecnologia (CNPq).

Referências

[1] Mukhanov V.F., Feldman H.A., Brandenberger, R.H. - Theory of Cosmological Perturbation

[2] Brandenberger, R.H. - Lectures on the Theory of Cosmological Perturbation - arXiv hep-th/0306071

[3] Linde, A. - Lectures on Inflationary Cosmology - arXiv hep-th/9410082