Relatório de Iniciação Científica

Marcio Guilherme Bronzato de Avellar

1 Introdução

A teoria das perturbações gravitacionais linearizadas, ou seja, perturbações cosmológicas, em um universo que se expande é um ponto fundamental da cosmologia moderna. Ela é usada para descrever o crescimento de estruturas no universo ou calcular as flutuações da radiação de fundo em microondas, entre outros [1].

A radiação cósmica de fundo nos dá a melhor evidência [1],[3], se assim podemos dizer, de que o universo era muito homogêneo e isotrópico em sua infância, uma vez que as flutuações em temperatura são da ordem de 10^{-4}. Essas flutuações são relacionadas com perturbações na densidade que por sua vez são consequências das instabilidades gravitacionais. Isso porque uma porção mais densa exerce uma força gravitacional mais forte sobre a matéria em sua volta e assim, com o passar do tempo, a perturbação cresce. Num universo que se expande, esse efeito será dramaticamente diminuído, homogeinizando e isotropizando o universo.

Nosso trabalho aqui é estudar a origem quântica das flutuações, mais especificamente, achar a variação de segunda ordem da ação e entender o processo de quantização da mesma, conforme [1],[2]. Antes, entretanto, mais como exercício mas fundamental para o que vem a seguir, calcularemos as equações de Einstein para um universo idealizado, chamado "background" e depois apenas diremos como serão as perturbações (escalares) da métrica.

1.1 As equações básicas

O elemento de linha do "background" é:

$$ds^2 = g^{(0)}_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = a^2(\eta)(d\eta^2 - \gamma_{ij}dx^i dx^j) \tag{1}$$

onde η é o tempo conforme (coordenada que "retira" os efeitos da expansão do universo das medidas no espaço-tempo) e a métrica é a de Friedmann-Robertson-Walker. Ainda,

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij}\Big[1 + \frac{1}{4}K(x^2 + y^2 + z^2)\Big] \tag{2}$$

onde K é 0, 1 ou -1, dependendo se o universo é plano, fechado ou aberto.

As equações de Einstein são

$$G^{\mu}_{\nu} = R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu} R = 8\pi G T^{\mu}_{\nu} \tag{3}$$

onde temos que

$$R^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\alpha} R_{\nu\alpha}\ ,\ R_{\nu\alpha} = \frac{\partial \Gamma^{l}_{\nu\alpha}}{\partial x^{l}} - \frac{\partial \Gamma^{l}_{\nu l}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{l}_{\nu\alpha}\Gamma^{m}_{lm} - \Gamma^{m}_{\nu l}\Gamma^{l}_{\alpha m}\ e\ R = R^{\mu}_{\mu}. \tag{4}$$

Foram calculadas as seguintes conexões:

$$\Gamma^{0}_{00} = \Gamma^{1}_{10} = \Gamma^{2}_{20} = \Gamma^{3}_{30} = \frac{\dot{a}}{a}\ ,$$

$$\Gamma^{0}_{11} = \Gamma^{0}_{22} = \Gamma^{0}_{33} = \frac{\dot{a}}{a}\Big[1 + \frac{1}{4}K(x^2+y^2+z^2)\Big]\ ,$$

$$\Gamma^{i}_{ii} = -\frac{K}{2}x^{i}\gamma,$$

$$\Gamma^{i}_{ij} = -\frac{K}{2}x^{j}\gamma,$$

$$\Gamma^{i}_{jj} = \frac{K}{2}x^{i}\gamma,$$

onde $\gamma = \frac{1}{1+\frac{1}{4}K(x^2+y^2+z^2)}$ e $i, j = 1, 2, 3$.

E com elas foi possível calcular os $R_{\nu\alpha}$, os R^{μ}_{ν} e o R:

$$R_{00} = -3\Big[\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\Big]\ ,$$

$$R_{11} = R_{22} = R_{33} = \beta^{-2}\Big[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\Big] + 2K\beta^{-1} - \frac{K^2}{2}\beta^{-2}(x^2+y^2+z^2)\ ,$$

$$R^{\mu}_{\nu} = g^{\mu 0}R_{\nu 0} + g^{\mu 1}R_{\nu 1} + g^{\mu 2}R_{\nu 2} + g^{\mu 3}R_{\nu 3}\ ,$$

$$R = -6\Big[\frac{\ddot{a}}{a^3} + \frac{K}{a^2}\Big]\ ,$$

onde $\beta = 1 + \frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)$.

Assim, as equações de Einstein se reduzem à equação 0-0

$$\dot{a}^2 + Ka^2 = \frac{8\pi}{3}GT^{0}_{0}a^4\ ,\ \dot{a} = \frac{da}{d\eta} \tag{5}$$

e à equação i-i

$$\ddot{a} + Ka = \frac{4\pi}{3}GTa^3\ ,\ T \equiv T^{\mu}_{\mu}. \tag{6}$$

Para que nosso universo seja mais realístico, vamos inserir perturbações na métrica (das instabilidades gravitacionais citadas acima, já que a métrica descreve a geometria e esta está ligada intimamente à gravidade). Desse modo,

$$ds^2 = g^{(0)}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \delta g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \ . \tag{7}$$

Aqui, supomos perturbações escalares na métrica [1], as quais me fornecem inomogeneidades que crescem e que têm um importante papel na dinâmica da matéria. Desse modo,

$$\delta g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2\phi & -B_{|i} \\ -B_{|i} & 2(\psi\gamma_{ij} - E_{|ij}) \end{pmatrix} \tag{8}$$

e assim

$$ds^2 = a^2(\eta)\big[(1+2\phi)d\eta^2 - 2B_{|i}dx^i d\eta - [(1-2\psi)\gamma_{ij} + 2E_{|ij}]dx^i dx^j\big] \ . \tag{9}$$

As quantidades ϕ, ψ, B e E são funções escalares das coordenadas espaciais e temporal.

2 Teoria quântica de perturbações

Essa teoria envolve a quantização simultânea da métrica e das flutuações da matéria, o que so é possível num universo em expansão. Quantizar os campos de matéria nesse tipo de "background" leva, em geral, à produção de partículas e esse processo é a base para a formação de estruturas num universo inflacionário. Por sua vez, obtemos o conjunto das condições iniciais para a evolução das perturbações clássicas.

Vamos então quantizar as perturbações da métrica e da matéria no "background" homogêneo e isotrópico da seção anterior. As variáveis em questão são as variáveis de perturbação também citadas na seção anterior. Para a obtermos a ação para essa variáveis, vamos expandir até segunda ordem a ação para a gravidade e para a matéria, já que a equações de movimento das perturbações de primeira ordem são dadas pela ação de segunda ordem.

Começaremos pela parte gravitacional.

$$S_{gr} = -\frac{1}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}d^4x =$$

$$\frac{1}{16\pi G}\int \Big[\mathcal{N}\gamma^{\frac{1}{2}}(K^i_j K^j_i - K^2) + \frac{1}{2}(\gamma^{\frac{1}{2}}\gamma^{ij}\mathcal{N})_{,i}(ln\gamma)_{,j} +$$

$$\mathcal{N}_{,i}(\gamma^{\frac{1}{2}}\gamma^{ij})_{,j} - \frac{1}{2}\mathcal{N}\gamma^{\frac{1}{2}}\,{}^{(3)}\Gamma^l_{ij}\gamma^{ij}_{,l} + \mathcal{D}^{gr}_1\Big]d^4x. \tag{10}$$

Nesse formalismo, chamado ADM, temos as seguintes relações:

$$\mathcal{N}_i = a^2 B_{,i} \;\; \gamma_{ij} = a^2(1-2\psi)\delta_{ij} + 2a^2 E_{,ij} \;\; \mathcal{N} = a\Big(1+\phi-\frac{1}{2}\phi^2+\frac{1}{2}B_{,i}B_{,i}\Big),$$

$$\gamma^{ij} = a^{-2}\big(\delta_{ij}+2\psi\delta_{ij}-2E_{,ij}+4\psi^2\delta_{ij}+4E_{,il}E_{,lj}-8E_{,ij}\psi\big),$$

$$K \equiv K^i_i, \;\; \gamma = det(\gamma_{ij}), \;\; {}^{(3)}\Gamma^l_{ij} = \psi_{,l}\delta_{ij}-\psi_{,i}\delta_{lj}-\psi_{,j}\delta_{li}+E_{lij}+t_2,$$

$$K^i_j = -\frac{1}{a}\Big[\delta_{ij}(\mathcal{H}-\mathcal{H}\phi-\psi^{'})-(B-E^{'})_{,ij}+\delta_{ij}(\frac{3}{2}\mathcal{H}\phi^2+\phi\psi^{'}-2\psi\psi^{'})+2(E_{,ij}\psi)^{'}+$$

$$\phi B_{,ij}-\phi E^{'}_{,ij}-2\psi B_{,ij}+2E_{,il}B_{,lj}-2E_{,il}E^{'}_{,lj}+\delta_{ij}\psi_{,l}B_{,l}-$$

$$\psi_{,i}B_{,j}-\psi_{,j}B_{,i}+E_{,ijl}B_{,l}-\frac{1}{2}\mathcal{H}\delta_{ij}B_{,l}B_{,l}\Big],$$

$$\mathcal{H} = \frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}.$$

Substituindo esses valores na expressão da ação e tomando os termos de segunda ordem na perturbação obtemos $\delta_2 S_{gr}$:

$$\delta_2 S_{gr} = \frac{1}{16\pi G}\int\Big[a^2[-6\psi^{'2}-12\mathcal{H}(\phi+\psi)\psi^{'}-9\mathcal{H}^2(\phi+\psi)^2-$$

$$2\psi_{,i}(2\phi_{,i}-\psi_{,i})-4\mathcal{H}(\phi+\psi)(B-E^{'})_{,ii}+4\mathcal{H}\psi^{'}E_{,ii}-4\psi^{'}(B-E^{'})_{,ii}-$$

$$4\mathcal{H}\psi_{,i}B_{,i}+6\mathcal{H}^2(\phi+\psi)E_{,ii}-4\mathcal{H}E_{,ii}(B-E^{'})_{,jj}+4\mathcal{H}E_{,ii}B_{,jj}+3\mathcal{H}^2E^2_{,ii}+$$

$$3\mathcal{H}^2B_{,i}B_{,i}]+\mathcal{D}^{gr}_1+\mathcal{D}^{gr}_2\Big], \tag{11}$$

onde

$$\mathcal{D}^{gr}_1 = -2(\gamma^{1/2}K)^{'}+2(\gamma^{1/2}K\mathcal{N}^i-\gamma^{1/2}\gamma^{ij}\mathcal{N}_{,j})_{,i}-[\mathcal{N}\gamma^{ij}(\gamma^{1/2})_{,j}+\mathcal{N}(\gamma^{ij}\gamma^{1/2})_{,j}]_{,i}$$

e

$$\mathcal{D}^{gr}_2 = \{a^2[-8\mathcal{H}(E_{,ij}(B-E^{'})_{,j}-E_{jj}(B-E^{'})_i+\frac{1}{2}E_{,jj}B_{,i})+$$

$$6\mathcal{H}^2(E_{,ij}E_{,j}-E_{,jj}E_{,i})+(B-E^{'})_{,ij}(B-E^{'})_{,j}-$$

$$(B-E^{'})_{,jj}(B-E^{'})_{,i}+E_{,ijl}E_{,jl}-E_{,jjl}E_{,li}]\}_{,i}.$$

Os termos $\mathcal{D}_1^{gr}$ e $\mathcal{D}_2^{gr}$ são termos que não afetam as equações de movimento porque são termos de derivadas totais.

Feito isso, agora é necessário encontrar o termo $\delta_2 S_m$ de S_m, correspondente à matéria.

Sabemos que

$$S_m=\int \mathcal{L}_m(g)\sqrt{-g}d^4x=$$

$$\int \Big[\frac{1}{2}\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}-V(\alpha)\Big]\sqrt{-g}d^4x. \tag{12}$$

Calculando a variação de S_m, chegamos à forma geral:

$$\delta_2 S_m=\int \Big[\frac{\delta_2\sqrt{-g}}{\sqrt{-g_0}}\mathcal{L}_0+\frac{2\delta_1\sqrt{-g}}{\sqrt{-g_0}}\delta_1\mathcal{L}+\delta_2\mathcal{L}\Big]\sqrt{-g_0}d^4x. \tag{13}$$

Os termos $\delta_1\mathcal{L}$ e $\delta_2\mathcal{L}$ podem ser calculados expandindo $\mathcal{L}_m$ em uma série de Taylor sobre φ_0. Assim, a variação de segunda ordem da ação total fica

$$\delta_2 S=\delta_2 S_{gr}+\delta_2 S_m=\frac{1}{6l^2}\int \Big[a^2[-6\psi^{'2}-12\mathcal{H}\phi\psi^{'}-$$

$$-2\psi_{,i}(2\phi_{,i}-\psi_{,i})-2(\mathcal{H}^{'}+2\mathcal{H}^2)\phi^2+3l^2(\delta\varphi^{'2}-\delta\varphi_{,i}\delta\varphi_{,i}-V_{,\varphi\varphi}a^2\delta\varphi^2)+$$

$$6l^2[\varphi_0^{'}(\phi+3\psi)^{'}\delta\varphi-2V_{,\varphi}a^2\phi\delta\varphi]+4(B-E^{'})_{,ii}(\frac{3}{2}l^2\varphi_0^{'}\delta\varphi-\psi^{'}-\mathcal{H}\phi)]+$$

$$\mathcal{D}_1^{gr}+\mathcal{D}_2^{gr}+\mathcal{D}_3\Big]d^4x, \tag{14}$$

onde

$$\mathcal{D}_3=[6l^2a^2\varphi_0^{'}\delta\varphi(E_{,ii}-\phi-3\psi)+2\mathcal{H}a^2(E_{,ii}^2+2\psi E_{,ii}-3\psi^2)]^{'}+$$

$$\{a^2[2(2\mathcal{H}^{'}+\mathcal{H}^2)(E_{,ji}E_{,j}-E_{,jj}E_{,i})-4\mathcal{H}\psi B_{,i}-6l^2\varphi_0^{'}B_{,i}\delta\varphi]\}_{,i}$$

é um outro termo de derivada total e que também não afeta a ação.

Agora, introduzimos um potencial que seja um invariante de gauge v, conforme já dito, e sujeito ao vínculo $\psi^{'}+\mathcal{H}\phi=\frac{3}{2}l^2\varphi_0^{'}\delta\varphi$ obtido pela variação da equação acima com relação a $(B-E^{'})$.

Desse modo,

$$v = a\Big[\delta\varphi + (\frac{\varphi_0^{'}}{\mathcal{H}})\psi\Big]. \tag{15}$$

Com esse potencial e com a equação do vínculo, substituimos $\delta\varphi$ e $\psi^{'}$ na equação da ação e podemos escrever a ação total como

$$\delta\varphi = \frac{1}{a}[v - z\psi] \;\; e \;\; \psi^{'} = \frac{3}{2}l^2\varphi_0^{'}\delta\varphi - \mathcal{H}\phi$$

com

$$\delta\varphi^{'} = -\frac{1}{a^2}[v - z\psi] + \frac{1}{a}[v^{'} - z^{'}\psi - z\psi^{'}] \;\; e \;\; \delta\varphi_{,i} = \frac{1}{a}[v_{,i} - z\psi_{,i}].$$

Então,

$$\delta_2 S = \frac{1}{2}\int\Big\{\frac{a^2}{3l^2}\Big[-6[\frac{3}{2}l^2\varphi_0^{'}(\frac{1}{a}[v-z\psi]) - \mathcal{H}\phi]^2 - 12\mathcal{H}\phi[\frac{3}{2}l^2\varphi_0^{'}(\frac{1}{a}[v-z\psi] - \mathcal{H}\phi] -$$

$$-2\psi_{,i}(2\phi_{,i} - \psi_{,i}) - 2(\mathcal{H}^{'} + 2\mathcal{H}^2)\phi^2 + 3l^2(\delta\varphi^{'2} - \delta\varphi_{,i}\delta\varphi_{,i} - V_{,\varphi\varphi}a^2(\frac{1}{a}[v - z\psi])^2) +$$

$$6l^2[\varphi_0^{'}(\phi + 3\psi)^{'}(\frac{1}{a}[v - z\psi]) - 2V_{,\varphi}a^2\phi(\frac{1}{a}[v - z\psi])]\Big] +$$

$$\mathcal{D}_1^{gr} + \mathcal{D}_2^{gr} + \mathcal{D}_3\Big\}d^4x,$$

de modo que

$$\delta_2 S = \frac{1}{2}\int\Big[v^{'2} - v_{,i}v_{,i} + \frac{z^{''}}{z}v^2 + \frac{1}{3l^2}\sum_{i=1}^{4}\mathcal{D}_i\Big]d^4x, \;\; z = \frac{a\varphi_0^{'}}{\mathcal{H}}, \tag{16}$$

onde

$$\mathcal{D}_4 = -3l^2\frac{\partial}{\partial\eta}\Big[2\frac{a^2}{\mathcal{H}}\Big(\frac{\varphi_0^{'}}{a}\Big)^{'}v\psi + \frac{3l^2\psi_0^{'2}}{2\mathcal{H}}v^2 - 2a^2\varphi_0^{'}v\phi - \frac{2a^2}{3l^2\mathcal{H}}\psi_{,i}\psi_{,i}$$

$$+2\frac{\varphi_0^{'2}}{\mathcal{H}}a^2\phi\psi + \frac{1}{2}\Big(\frac{\varphi_0^{'}}{a}\Big)^{'2}\frac{a^4}{\mathcal{H}}\psi^2 + \mathcal{H}v^2\Big].$$

2.1 Quantização

Acabamos de escrever a ação de segunda ordem. Ela pode ser escrita na forma geral

$$\delta_2 S = \frac{1}{2}\int \left[v^{'2} - c_s^2\gamma^{ij}v_{,i}v_{,j} + \frac{z^{''}}{z}v^2\right]\sqrt{\gamma}d^4x. \tag{17}$$

Para o caso do nosso campo escalar, num universo plano, $\gamma^{ij} = \delta^{ij}$, $\sqrt{\gamma} = 1$ e $c_s^2 = 1$.

O primeiro passo para a quantização do potencial v é escrever o momento canônico conjugado a v, $\pi(\eta, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v'} = v^{'}(\eta, \mathbf{x})$, e escrever o hamiltoniano:

$$H = \int (v^{'}\pi - \mathcal{L})d^3x = \frac{1}{2}\int \left[\pi^2 + v_{,i}v_{,i} - \frac{z^{''}}{z}v^2\right]d^3x.$$

A equação de movimento para o campo v é obtida variando a equação 17 com respeito a v, lembrando que na teoria quântica as variáveis v e π se tornam operadores.

$$\hat{v}^{''} - \Delta\hat{v} - \frac{z^{''}}{z}\hat{v} = 0. \tag{18}$$

Essa equação também é chamada de equação de evolução do campo e é equivalente às equações de Heisenberg:

$$i\hat{v}' = [\hat{v}, \hat{H}] \;\; e \;\; i\hat{\pi}' = [\hat{\pi}, \hat{H}]. \tag{19}$$

Na representação de Heisenberg os estados são independentes do tempo e a dependência temporal vem dos operadores. Então vamos expandir o operador $\hat{v}$ sobre uma base completa e ortonormal de soluções da equação de evolução do campo. Essas soluções serão denotadas por $v(\mathbf{x}, \eta) \sim \psi_J(\mathbf{x})v_J^*(\eta)$ onde o índice J representa o J-ésimo modo de Fourier da expansão sobre o conjunto da base e ψ_J são as auto-funções do operador $\Delta = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x^{i2}}$ com autovalores k_J^2. Logo, satisfaz $\Delta\psi_J = -k_J^2\psi_J$.

No caso particular de um universo plano podemos tomar uma base de ondas planas, de modo que

$$v(\mathbf{x}, \eta) = \sum_k v_k(\eta)\psi_k \;,\; \psi_k = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}e^{i\mathbf{kx}}.$$

Substituindo esse ansatz na equação de campo obtemos

$$v_k^{''}(\eta) + k_k^2 v_k(\eta) - \frac{z^{''}}{z}v_k(\eta) \equiv v_k^{''}(\eta) + E_k^2 v_k(\eta) = 0. \tag{20}$$

Agora podemos escrever a expansão de $\hat{v}$ como

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int d^3k[\psi_k(\mathbf{x})v_k^*(\eta)a_k^- + \psi_k^*(\mathbf{x})v_k(\eta)a_k^+]. \tag{21}$$

Interessantemente, em virtude das equações 20, temos na expressão os operadores $\hat{a}_k^+$ e $\hat{a}_k^-$, que são os operadores de criação e aniquilação, que já encontramos na fase 2 desse projeto.

Entretanto, as frequências são dependentes do tempo pois $m^2 = \frac{z''}{z}$. Quando quantizamos as perturbações de um espaço-tempo curvo, o "background" nos dá uma direção distinta do tempo, mas a noção de modos com freqüência positiva (por freqüência, entenda-se freqüência das soluções para $v_k(\eta)$ da equação 20, que têm forma exponencial) não é um invariante temporal. Desse modo, não é possível ter uma única definição de vácuo.

Então, para um tempo η_0, podemos achar uma combinação de soluções da equação 20, que também é uma solução, que é de freqüência positiva se impusermos as condições iniciais

$$v_k(\eta_0) = E^{-\frac{1}{2}}(\eta_0), \quad v_k^{'}(\eta_0) = iE^{\frac{1}{2}}(\eta_0).$$

Desse modo, podemos definir um estado de vácuo $|0_{\eta_0}\rangle \equiv |\psi_0\rangle$:

$$a_k^-|0_{\eta_0}\rangle = 0, \quad \forall k. \tag{22}$$

Um observador em η_0 verá o estado acima definido como vazio de partículas, mas porque em um tempo $\eta_1 > \eta_0$ os modos que são de frequência positiva deixam de sê-lo, um observador definirá o estado $|\psi_1\rangle$ como vazio de partículas, esse estado satisfazendo:

$$b_k^-|\psi_1\rangle = 0, \quad \forall k. \tag{23}$$

Agora, se denotarmos os modos de frequência positiva e negativa em um tempo η_i por $v_k^{(i)+}$ e $v_k^{(i)-}$ respectivamente, então em termos da discussão acima teremos

$$v_k^{(1)+} = \alpha_k v_k^{(0)+} + \beta_k v_k^{(0)-}, \quad v_k^{(1)-} = \alpha_k^* v_k^{(0)+} + \beta_k^* v_k^{(0)-}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \tag{24}$$

onde

$$\alpha_k = \langle v_k^{(0)+}, v_k^{(1)+}\rangle \quad \beta_k = \langle v_k^{(0)-}, v_k^{(1)-}\rangle.$$

Agora podemos escrever os operadores $\hat{a}^+$ e $\hat{a}^-$ em termos de $\hat{b}^+$ e $\hat{b}^-$ e vice-versa, de modo que o observador em η_1 definirá o operador de número de partículas $\hat{N}_k^1 = \hat{b}_k^+\hat{b}_k^-$ que, aplicado no estado ψ_0, dará um número não nulo de partículas:

$$\langle\psi_0|\hat{N}_k^1|\psi_0\rangle = |\beta_k|^2. \tag{25}$$

O que acabamos de mostrar foi que o campo escalar causa a produção de partículas a partir de um estado inicial de vácuo. Isso, em um modelo inflacionário de universo levará à formação de estruturas no universo presente.

2.2 Conclusões

O espectro de potências calculado para um modelo de inflação caótica com o potencial $V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$ ou para o modelo da nova inflação com o potencial $V(\varphi) = \frac{1}{4}\lambda\varphi^4$, desde que não se assuma que ϕ não esteja em equilíbrio térmico no início do universo não leva a inconsistências com o que se tira das observações. A vantagem desse formalismo é que como as variáveis são gauge-invariantes, os resultados da quantização são fisicamente consistentes e sem ambiguidades.

Entretanto, existem certos incômodos com tudo isso [2]. Vimos que assume-se que o campo quantizado v começa em algum tempo inicial t_i e que o modelo aplicado ao cenário inflacionário é "independente" da escolha do estado de vácuo. Ora, qual é o tempo t_i? Qual, dos estados de vácuo possíveis, deve ser escolhido?

Essas perguntas são pertinentes quando se percebe que, se a inflação durar apenas um pouco mais que o tempo mínimo necessário para que o mecanismo da inflação assegure a resolução do problema do horizonte e forneça um mecanismo de geração causal das anisotropias da RCFM, os correspondentes comprimentos de onda dessas anisotropias serão menores que a escala de comprimento de Planck (escalas onde a Mecânica Quântica e a Relatividade Geral se unem numa Gravidade Quântica) no início do período inflacionário, porque [1]:

$$k_{fis} \equiv \frac{k_c}{a(\eta)} \ logo, \ se \ a(\eta) \to 0 \Rightarrow k_{fis} \to \infty.$$

Mas o comprimento de onda é definido como [2]:

$$\lambda_{fis}(\eta) = 2\pi\frac{a(\eta)}{k_c} \Rightarrow \lambda_{fis} = \frac{2\pi}{k_{fis}}.$$

Então, para um tempo inicial t_i, que corresponde a um η_i, da ordem do tempo de Planck temos:

$$\lambda_{fis} \sim l_p \ e \ \lambda_{fis} < l_p \ se \ t < t_i. \tag{26}$$

E daí? Daí que pode-se perguntar o quão robustas são as previsões da cosmologia inflacionária contra o efeito da "física" trans-planckiana. Isso quer dizer: o quão sensível é o espectro produzido pela inflação às mudanças em uma escala tão pequena como essa?

Usualmente, para modelar esses possíveis efeitos usa-se uma relação de dispersão modificada [2], de modo que nossa equação de movimento (20) torna-se

$$v_k^{''} + \left[k_{eff}^2(k,\eta) - \frac{a^{''}}{a}\right]v_k = 0 \tag{27}$$

onde $k_{eff}^2(k,\eta) \equiv a^2(\eta)\omega^2\left(\frac{k}{a(\eta)}\right)$.

Assim, é possível detectar nas anisotropias da RCFM os efeitos, nos primórdios do universo, de uma era na qual a Mecânica Quântica e a Relatividade Geral eram igualmente importantes, analisando as mudanças no espectro de potências das flutuações quânticas causadas por modificações nas relações de dispersão das soluções da equação de movimento.

Essa modelagem pode, em princípio, responder aquelas duas perguntas iniciais, principalmente no que se refere à escolha do vácuo. Entretanto, deve-se notas que essas relações de dispersão modificadas são absolutamente "ad hoc", sem uma base sólida, já que não temos uma gravitação quântica desenvolvida. Ou ainda, pode-se ter frequências complexas no início do período inflacionário em escalas relevantes à cosmologia, ou seja, para a formação de estruturas, o que é inconsistente.

Ainda há muito estudo a ser feito nesse campo da Cosmologia. Mas já temos ao menos um "insight" de como pode ter sido a origem e a evolução do nosso universo.

Fim.

3 Referências bibliográficas

[1] Mukhanov V.F., Feldman H.A., Brandenberger, R.H. - Theory of Cosmological Perturbation
[2] Brandenberger, R.H. - Lectures on the Theory of Cosmological Perturbation - arXiv hep-th/0306071
[3] Linde, A. - Lectures on Inflationary Cosmology - arXiv hep-th/9410082