Relatório de Iniciação Científica

Marcio Guilherme Bronzato de Avellar

1 Introdução

Neste trabalho iniciamos o estudo de cosmologia inflacionária, uma idéia que foi desenvolvida na década de 80 para solucionar certos problemas com o modelo do Big Bang, a saber: o problema da planitude, o problema do horizonte, o problema da homogeneidade e da isotropia.

Esses problemas são resolvidos simultaneamente e com simplicidade no cenário da cosmologia inflacionária que tem, como idéia principal, que o universo sofreu por um breve período de tempo uma expansão quasi-exponencial durante o chamado "período inflacionário". Essa rápida expansão tornou o universo plano, homogêneo e isotrópico e diluiu exponencialmente a densidade de partículas exóticas nunca observadas, tais como monopolos e gravitinos.

Uma das maiores virtudes da cosmologia inflacionária está na teoria de reaquecimento do universo após a inflação, que explicaremos mais tarde.

2 Formalismo Lagrangeano para Campos Clássicos.

A evolução dos campos clássicos, ou seja, as equações de Euler-Lagrange, podem ser obtidas por meio do Princípio Variacional. Seja $\phi(\vec{q},t)$ um campo escalar função da coordenada geral e contínua $\vec{q}$ e do tempo t.

Então, a lagrangeana de um sistema sob ação desse campo é dada por uma soma sobre os vários graus de liberdade

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)\,. \tag{1}$$

Daí podemos escrever a ação integral associada a uma região V do espaço-tempo:

$$S = \int_V d^4q \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)\,. \tag{2}$$

Sabemos que a ação S deve ser estacionária para toda variação $\delta\phi$ de ϕ.

$$\delta S = S(\phi + \delta\phi) - S(\phi) =$$

$$= \int_V \Big[\mathcal{L}\big(\phi + \delta\phi, \partial_\mu\phi + \partial_\mu(\delta\phi)\big) - \mathcal{L}\big(\phi, \partial_\mu\phi\big)\Big] d^4q =$$

$$= \int_V \Big[\delta\phi \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi} + (\partial_\mu \delta\phi) \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\Big] d^4 q =$$

$$= \int_V \delta\phi \Big[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi} - (\partial_\mu) \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\Big] d^4 q + \int_V \partial_\mu S^\mu d^4 q \, .$$

onde $S^\mu = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi$. O segundo termo é igual a zero pelo Teorema de Stokes, e se $\delta S = 0$, então:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0 \, . \tag{3}$$

3 O mais simples modelo de inflação.

Nesse modelo constrói-se a seguinte Lagrangeana, com um campo escalar ϕ ("inflaton") minimamente acoplado com a gravidade:

$$\mathfrak{L} = \sqrt{-g} \Big[\frac{G}{16\pi} R + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi)\Big] \, . \tag{4}$$

Com essa lagrangiana podemos achar as equações de movimento do campo, utilizando a equação 3:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi} = -\sqrt{-g} \frac{dV(\phi)}{d\phi} \qquad \text{e}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi)} = \sqrt{-g} \frac{\partial(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi)}{\partial(\partial_\alpha \phi)} = \sqrt{-g} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \big(\delta^\alpha_\mu \partial_\nu \phi + \partial_\mu \phi \delta^\beta_\nu\big) = \sqrt{-g} \partial^\alpha \phi \, ,$$

de modo que temos as equações de Euler-Lagrange:

$$\partial_\alpha \big(\sqrt{-g} \partial^\alpha \phi\big) + \sqrt{-g} \frac{V(\phi)}{d\phi} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (-g) \partial^\alpha \phi + \sqrt{-g} \partial_\alpha \partial^\alpha \phi + \sqrt{-g} \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0$$

e, notando que $\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (-g) \partial^\alpha \phi = -\sqrt{-g} \partial_\alpha \big(ln(\sqrt{-g})\big) \partial^\alpha \phi$, temos:

$$-\sqrt{-g} \partial_\alpha \big(ln(\sqrt{-g})\big) \partial^\alpha \phi + \sqrt{-g} \partial_\alpha \partial^\alpha \phi + \sqrt{-g} \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0$$

e então:

$$-\partial_\alpha \big(ln(\sqrt{-g})\big) \partial^\alpha \phi + \partial_\alpha \partial^\alpha \phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \, .$$

Por fim, notando que $\sqrt{-g} = a^3(t)$ (é o determinante da métrica de Friedman-Robertson-Walker) e que o campo escalar é $\phi = \phi(t)$ chegamos na equação:

$$\ddot{\phi} - 3H\dot{\phi} + \frac{d}{d\phi} V(\phi) = 0 \, , \tag{5}$$

onde $H = \frac{\dot{a}}{a}$. Tiramos das equações de Friedman:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3} G \Big(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \Big) \tag{6}$$

e usaremos o sistema de "unidades naturais" $G = c = \hbar = 1$.

3.1 As condições iniciais.

Para a inflação acontecer, o estado de vácuo verdadeiro (o mínimo do potencial) nao é atingido imediatamente. Isso acontecerá quando o campo ϕ evolui lentamente.

Após uma análise detalhada das condições iniciais e apoiados no Teorema do virial podemos inferir que:

$$\phi \gg 1 \text{ com } \dot{\phi}^2 \ll \mathrm{V}(\phi) \quad \text{e} \quad \ddot{\phi} \ll \mathrm{H}\dot{\phi} \,. \tag{7}$$

Assim chegamos nas equações aproximadas:

$$3H\dot{\phi} = -\frac{d}{d\phi} V(\phi) \quad , \tag{8}$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} V(\phi) \tag{9}$$

onde o potencial mais simples seria seria, por exemplo, $V(\phi) = \frac{m^2 \phi^2}{2}$.

Resolvendo essas equações chegamos a expressões para o campo escalar e para o fator de escala:

$$\phi(t) = \phi_0 - \frac{m}{2\sqrt{3\pi}} t \quad , \tag{10}$$

$$a(t) = a_0 e^{2\pi [\phi_0^2 - \phi^2(t)]} \,. \tag{11}$$

Assim temos um cenário inflacionário, com o fator de escala crescendo quasi-exponencialmente.

4 Como a inflação começa.

Consideraremos aqui um universo fechado de tamanho inicial $l \sim 1$ em unidades de Planck em um estado de densidade de energia de Planck $\rho \sim 1$. Assim, a densidade de energia do campo deve ser:

$$\rho \sim \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \big(\partial_i \phi \big)^2 + V(\phi) \sim 1 \,. \tag{12}$$

Se o campo ϕ for maior que a densidade de energia de Planck, ou seja, $\phi > \phi_p$ onde $V(\phi_p) = 1$, efeitos de gravitação quântica são necessários e não podemos descrever classicamente a evolução do universo. Nesse caso é preciso ter $\phi \lesssim \phi_p$ embora não haja razão para se ter $\phi \ll \phi_p$, veja figura 1.

As condições iniciais típicas são, de acordo com o teorema do virial: $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \sim \frac{1}{2}\left(\partial_i\phi\right)^2 \sim V(\phi) \sim O(1)$. A inflação começa se $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_i\phi\right)^2 \lesssim V(\phi)$ (daqui justifica-se as condições que inferimos anteriormente). Ao longo da evolução as contribuições de $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ e $\frac{1}{2}(\partial_i\phi)^2$ são suprimidas e, depois de um curto período de tempo, $\rho \sim V(\phi)$.

O alto valor inicial de $1 \ll \phi_0 < \phi_p$, tem implicações muito importantes. Uma delas é explicar o problema do horizonte, intimamente relacionado com a homogeneidade e isotropia da RCFM. Observamos a homogeneidade da RCFM em uma escala de $10^{28}cm$, muito maior do que a que deveria ser pelos cálculos vindos do modelo do Big Bang! Se, por exemplo, $\phi_0 \sim \phi_p \sim m^{-1}$, para um universo de tamanho inicial $l_0 = 10^{-33}cm$ temos, após o período inflacionário:

$$a(t) \sim e^{2\pi\phi_0^2} \sim e^{\frac{2\pi}{m^2}} \; . \tag{13}$$

Com $m \sim 10^{-6}$, necessário para produzir $\frac{\delta\rho}{\rho} \sim 10^{-5}$ na RCFM, temos um tamanho final dessa região dado por:

$$l_f = a(t)l_0 \sim e^{2\pi 10^{12}} \times 10^{-33}\,\text{cm} \, > 10^{28}\,\text{cm}. \tag{14}$$

Ou seja, depois dessa inflação, um universo de $l_0 \sim 10^{-33}cm$ tem um tamanho muito maior que o do universo observável ($\sim 10^{28}cm$) e todo o fluido de partículas que permaneceria causalmente conectado numa pequena região foi exponencialmente "esticado", produzindo um universo homogêneo e isotrópico.

Notemos que o termo $\frac{k}{a^2} \to (e^{-10^{12}})^2$ na equação 6, o que significa que a curvatura espacial é totalmente suprimida.

5 Inflação híbrida.

Existem três mecanismos que podem fazer a inflação terminar. Aqui, analisaremos o mecanismo de "cascata", que é quando um campo escalar cai rapidamente, sendo esse processo engatilhado pelo rolamento lento de um outro campo escalar.

O modelo mais simples de cascata é com o potencial:

$$V(\sigma,\phi) = \frac{(M^2 - \lambda\sigma^2)^2}{4\lambda} + \frac{m^2\phi^2}{2} + \frac{g^2\phi^2\sigma^2}{2} \tag{15}$$

$$V(\sigma,\phi) = \frac{M^4}{4\lambda} + \frac{\lambda\sigma^4}{4} + \frac{m^2\phi^2}{2} + \frac{(-M^2 + g^2\phi^2)\sigma^2}{2} \tag{16}$$

Nesse modelo, o campo escalar σ é um "campo de Higgs", responsável pela massa das partículas.

A massa quadrática efetiva do campo σ, definida por $M_\sigma \equiv \ddot{V}(\sigma_{min})$ é $M_\sigma = -(-M^2 + g^2\phi^2)$. Assim, para $\phi > \phi_c \equiv \frac{M}{g}$, o potencial $V(\sigma,\phi)$ tem um mínimo em $\sigma = 0$. A curvatura desse potencial efetivo na direção σ é muito maior que na direção ϕ. Então, nos primeiros estágios da expansão do universo, o campo σ cai para $\sigma = 0$ e ϕ permanece grande por muito tempo, veja figura 2.

Por essa razão consideramos o estágio de inflação com ϕ grande e $\sigma = 0$ como na seção anterior.

Uma análise mais profunda desse modelo, com cálculos mais detalhados, nos diz que o período inflacionário termina quando o campo $\phi = \phi_c = \frac{M}{g}$, com o campo σ caindo para um novo mínimo em torno do qual oscila rapidamente.

6 Como a inflação termina: reaquecimento.

A teoria do reaquecimento do universo após a inflação é uma das mais importantes aplicações da teoria quântica de criação de partículas, já que quase toda a matéria do universo no estágio subsequente (dominado pela radiação) foi criada nesse período.

No estágio inflacionário, toda a energia estava concentrada no campo ϕ em forma de energia potencial, já que o campo estava num estado de rolamento lento. Logo depois do fim da inflação, esse campo começa a oscilar em torno do mínimo de seu potencial. Gradualmente essas oscilações produzem muitas partículas elementares. A interação entre elas leva ao equilíbrio térmico com temperatura T_r, chamada temperatura de reaquecimento.

Divide-se, então, o período de reaquecimento em três estágios. Primeiro, o campo oscila coerentemente decaindo em bósons massivos, devido a um processo chamado de ressonância paramétrica - um processo explosivo (pelo princípio de exclusão de Pauli, não há criação explosiva de férmions). Segundo, essas partículas elementares criadas decaem. Em terceiro, as partículas produzidas interagem estre si, levando ao equilíbrio térmico.

Assim, após a inflação o universo emerge num estado denso e quente, dominado por radiação. Essas "novas condições iniciais" do universo são o que entendemos modernamente por "Big Bang Quente".

7 Próxima etapa.

No próximo semestre, o último desse projeto de iniciação científica, estudaremos as flutuações em modelos inflacionários, em seus aspectos clássicos e quânticos. Em particular, estudaremos a geração quântica de flutuações (criação de partículas) e o problema "trans-planckiano".

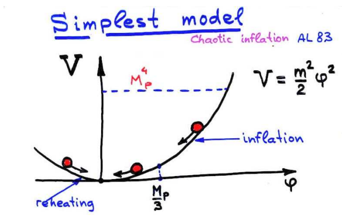

Figura 1: Modelo simples

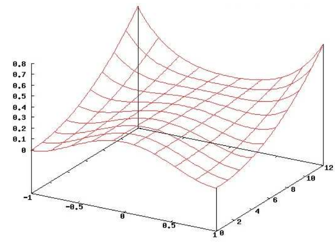

Figura 2: Modelo híbrido