Relatório de Iniciação Científica

Marcio Guilherme Bronzato de Avellar

1 Introdução

Nesse semestre foi iniciada a segunda fase do projeto de iniciação científica em "Inflação, criação quântica de partículas e efeitos transplanckianos". Assim, foi estudado o problema do Oscilador Harmômico Quântico com Perturbações (freqüências variáveis), o Oscilador Harmônico no desenvolvimento de Heisenberg, que é uma breve introdução à teoria quântica de campo, o artigo "Transplanckian Physics and Inflationary Cosmology" do prof. Robert H. Brandenberger, e Relatividade Especial pelo livro "Spacetime Physics, a Introduction to Relativity" de Taylor e Wheeler.

2 O Oscilador Harmônico Quântico

Chamamos de oscilador harmônico uma partícula de masssa m que executa um movimento sob a ação de uma força elástica (restauradora) $F = -kx$ (trataremos o caso unidimensional apenas).

Analisaremos esse problema em quatro etapas:

- Achar a função de onda do estado estacionário.
- Estudar os pacotes de onda ou estados coerentes.
- Introduzir uma pequena perturbação linear.
- Introduzir uma perturbação dependente do tempo na freqüência.

2.1 A função de onda do estado estacionário.

A força elástica $F = -kx \Rightarrow$ potencial $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$.

A equação de Schrödinger para o estado estácionário é:

$$\widehat{H}\psi = \Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\Big)\psi = E\psi.$$

Podemos escrever o hamiltoniano da seguinte maneira:

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m}\Big[\Big(\frac{\hbar}{i}\frac{d^2}{dx^2}\Big)^2 + \Big(m\omega x\Big)^2\Big],$$

de onde tiramos os operadores escada:

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2m}}\Big[\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} + im\omega x\Big], \qquad a_- = \frac{1}{\sqrt{2m}}\Big[\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} - im\omega x\Big],$$

e ainda temos: $\widehat{H} = a_+a_- + \frac{1}{2}\hbar\omega$ ou $\widehat{H} = a_-a_+ - \frac{1}{2}\hbar\omega$.

Se ψ é um estado estacionário de energia E, então $a_+\psi$ é um estado estacionário de energia $E + \hbar\omega$ e $a_-\psi$ é um estado estacionário de energia $E - \hbar\omega$.

O estado fundamental é tal que $a_-\psi = 0$ e obtemos a função de onda resolvendo a seguinte equação:

$$a_-\psi_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{2m}}\Big[\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} - im\omega x\Big]\psi_0 = 0,$$

chegando em:

$$\psi_0(x) = \Big(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\Big)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

Resolvendo a equação de Schrödinger com $\psi(x,t) = \psi_0(x)T(t)$:

$$\psi_0(x) = \Big(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\Big)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}.$$

Com a utilização do operador a_+ obtemos:

$$\psi_n(x) = \Big(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\Big)^{\frac{1}{4}} \frac{(-i)^n}{\sqrt{n!(\hbar\omega)^n}}(a_+)^n e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2},$$

que têm energias $E = \Big(n + \frac{1}{2}\Big)\hbar\omega$.

Entretanto, o cálculo do valor médio da posição para as funções ψ_n, nos dá sempre $\langle x\rangle = 0$, ou seja, nenhuma oscilação.

Para comparar o sistema com o análogo clássico, estudaremos agora os pacotes de onda ou estados coerentes. Estes estados não são em geral estacionários e vamos analisar a evolução temporal desses estados.

2.2 Os pacotes de onda ou estados coerentes.

Seja então um estado qualquer ϕ_α tal que $a_-\phi_\alpha = \alpha\phi_\alpha$ onde α é um número complexo qualquer, já que a_- não é hermiteano.

Vamos expandir $\phi_\alpha(x)$ em estados estacionários para $t = 0$:

$$\phi_\alpha(x) = \sum_n \psi_n(\psi_n, \phi_\alpha),$$

onde $(\psi_n, \phi_\alpha) = \frac{(-i)^n\alpha^n}{\sqrt{n!(\hbar\omega)^n}}(\psi_0, \phi_\alpha)$ e (ψ_0, ϕ_α) é uma constante.

Obtemos:

$$\phi_\alpha(x) = K\sum_n \frac{1}{n!}\left(\frac{\alpha a_+}{\hbar\omega}\right)^n \psi_0, \qquad K = constante.$$

Normalizando $\phi_\alpha(x)$ obtemos K, assim:

$$\phi_\alpha(x) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2\hbar\omega}} \sum_n \frac{1}{n!}\left(\frac{\alpha a_+}{\hbar\omega}\right)^n \psi_0 = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2\hbar\omega}} \sum_n \frac{(-i)^n\alpha^n}{\sqrt{n!(\hbar\omega)^n}}\psi_n.$$

Incluindo a evolução temporal $e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$:

$$\phi_\alpha(x,t) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2\hbar\omega}} \sum_n \frac{(-i)^n(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!(\hbar\omega)^n}}\psi_n e^{-i\frac{\omega}{2}t},$$

onde $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$.

Calculando $\langle x\rangle$ obtemos:

$$\langle x\rangle = |\alpha|\sqrt{\frac{2}{m\omega^2}}sin(\omega t - \beta).$$

Vemos imediatamente que o resultado obtido oscila essencialmente da mesma maneira que o resultado clássico.

2.3 Perturbações lineares.

Em teoria de perturbações, definimos um hamiltoniano perturbado da seguinte maneira: $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{V}$ onde $\widehat{H}_0$ é o hamiltoniano de um problema já resolvido não perturbado e $\widehat{V}$ é um termo perturbativo ou potencial perturbativo.

O problema não perturbado é rotulado com índices zero da seguinte maneira:

$$\widehat{H}_0\psi_n^{(0)} = E_n^{(0)}\psi_n^{(0)}.$$

Então, dessa maneira, o problema perturbado que precisamos resolver é:

$$\widehat{H}\psi_n = (\widehat{H}_0 + \widehat{V})\psi_n,$$

onde $E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + ...$ e $\psi_n = \sum_m c_{nm}\psi_m^{(0)}$, lembrando que índices superiores diferentes de zero representam as correções devido ao potencial perturbativo ao sistema não perturbado.

Com algumas manipulações algébricas chegamos ao coeficiente:

$$c_{nm}^{(1)} = -\frac{V_{mn}}{E_m^{(0)} - E_n^{(0)}}$$

que nos dá, para $m \neq n$, a correção de primeira ordem da função de onda e para $m = n$, a primeira correção de energia:

$$\psi_n = \psi_n^{(0)} - \sum_{m \neq n} \frac{V_{mn}}{E_m^{(0)} - E_n^{(0)}} \psi_m^{(0)} \quad com \quad E_n^{(1)} = V_{nn} = \langle \psi | \widehat{V} | \psi \rangle.$$

No caso do oscilador harmônico, inserimos uma perturbação linear na freqüência por ser de fácil tratamento (nesse estudo estamos interessados no método):

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m(\omega + \Delta\omega)^2 x^2 \approx -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}m2\omega\Delta\omega x^2.$$

Vemos imediatamente que o potencial perturbativo é $V = m\omega\Delta\omega x^2$.

Então podemos calcular a correção de primeira ordem da energia do estado fundamental, $E_0^{(1)}$ sabendo que:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

Então:

$$E_0^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^* \widehat{V} \psi = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\Delta\omega$$

e de maneira mais geral:

$$E_n = \hbar(\omega + \Delta\omega)\Big(n + \frac{1}{2}\Big).$$

2.4 A perturbação dependente do tempo na freqüência.

O potencial perturbativo depende do tempo nesse caso. Então o hamiltoniano fica: $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{V}(t)$.

Quando a dependência temporal é explícita não há conservação de energia que, em mecânica quântica, é representada por $\dot{\widehat{H}} = 0$. Por isso o hamiltoniano não possuirá estados estacionários, de maneira geral. Mas $\widehat{H}_0$ possui estados estacionários e tomaremos a perturbação como correção aos estados estacionários.

A equação de Schrödinger para o sistema perturbado é:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = (\widehat{H}_0 + V(t))\psi$$

e escreveremos $\psi_n = \sum_k a_{kn}(t)\psi_k^{(0)}$ para a função de onde que corrige $\psi_n^{(0)}$.

Substituindo na equação de Schrödinger chegamos a:

$$\sum_k \psi_k^{(0)} i\hbar \frac{d}{dt} a_{kn}(t) = \sum_k a_{kn}(t)\widehat{V}\psi_k^{(0)}.$$

Multiplicando à esquerda por $\psi_m^{(0)*}$ e integrando:

$$i\hbar\frac{d}{dt}a_{mn}(t) = \sum_k a_{kn}(t)V_{mk}(t),$$

onde $V_{mk}(t) = e^{i\omega_{mk}t}\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi_m^{(0)*}\widehat{V}\psi_k^{(0)} = e^{i\omega_{mk}t}V_{mk}$
e sendo $\omega_{mk} = \frac{E_m^{(0)}-E_k^{(0)}}{\hbar}$.

Com isso chegamos à seguinte expressão:

$$a_{mn}^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int dtV_{mn}e^{i\omega_{mn}t}$$

que, para $m = n$ nos dá a primeira correção da energia e para $m \neq n$ nos dá os coeficientes das correções da função de onda, como no caso da perturbação linear.

3 O Oscilador Harmônico no desenvolvimento de Heisenberg

A teoria quântica de campos é melhor entendida na descrição de Heinsenberg, de operadores dependentes do tempo e estados constantes. Então vamos utilizar essa descrição no oscilador harmônico quântico simples.

Uma teoria quântica de campo é uma teoria de suas variáveis dinâmicas. No caso do oscilador harmônico temos a posição dependente do tempo $q(t)$. O que define essa teoria é a Lagrangiana do sistema:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2(t) - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2(t).$$

As equações de Euler-Lagrange ficam:

$$m\big(\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t)\big) = 0,$$

que conduz à solução:

$$q(t) = q_0 cos(\omega t) + \frac{\dot{q}_0}{\omega}sin(\omega t).$$

Na teoria de campos deve-se notar que os valores iniciais são operadores. Alguns resultados da álgebra de operadores são:

$$p_0 \equiv \frac{\partial L(q_0, \dot{q}_0)}{\partial \dot{q}_0},$$

$$[q_0, q_0] = 0, \qquad [q_0, \dot{q}_0] = \frac{i\hbar}{m}, \qquad [\dot{q}_0, \dot{q}_0] = 0.$$

Mas ainda temos:

$$\left[q(t), \dot{q}(t)\right] = \frac{i\hbar}{m}.$$

E definimos a função comutadora para tempos diferentes:

$$C(t,t') \equiv \left[q(t), q(t')\right] = -\frac{i\hbar}{m\omega} sin\left[\omega(t-t')\right],$$

que é útil para representar a função de Green retardada:

$$G_{ret}(t,t') \equiv \frac{i}{\hbar}\Theta(t-t')C(t,t').$$

Voltando à solução $q(t)$ do oscilador harmônico, podemos representá-la:

$$q(t) = q_0\left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\right) + \frac{\dot{q}_0}{\omega}\left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right)$$

e definindo:

$$a \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}q_0 + i\sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}}\dot{q}_0 \qquad a^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}q_0 - i\sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}}\dot{q}_0$$

chegamos a:

$$q(t) = \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}}\left(ae^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}\right).$$

É útil lembrar que o operador a diminui a energia e o operador $a^\dagger$ aumenta a energia sendo chamados, respectivamente, operadores de aniquilação e operadores de criação.

Lembremos que o estado fundamental normalizado do oscilador harmônico é:

$$\Omega(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2}$$

sendo ainda:

$$a|\Omega\rangle \equiv 0 \qquad \langle\Omega|\Omega\rangle \equiv 1.$$

Dois conceitos que são muito úteis no tratamento perturbativo das interações são os conceitos de ordenação temporal e o propagador. Quanto ao primeiro, se temos o produto de duas variáveis dinâmicas a tempo qualquer, o conceito de produto ordenado se refere ao mesmo produto, mas arranjado em ordem cronológica com o tempo menor à esquerda. O produto ordenado de $q(t)$ e $q(t')$ é definido como:

$$T\left(q(t)q(t')\right) \equiv \Theta(t-t')q(t)q(t') + \Theta(t'-t)q(t')q(t).$$

O propagador é definido como o valor esperado de vácuo do produto ordenado de dois operadores:

$$i\Delta(t,t') \equiv \langle\Omega| T\big(q(t)q(t')\big)|\Omega\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}e^{-i\omega|t-t'|}.$$

Note que a parte imaginária do propagador é:

$$Im\big(i\Delta(t,t')\big) = -\frac{\hbar}{2m\omega}sin\big(\omega|t-t'|\big)$$

e a parte real do propagador é o valor de vácuo esperado da função anticomutadora de $q(t)$ e $q(t')$:

$$Re\big(i\Delta(t,t')\big) = \frac{\hbar}{2m\omega}cos\big(\omega(t-t')\big) = \frac{1}{2}\langle\Omega|\{q(t),q(t')\}|\Omega\rangle.$$

4 Efeitos transplanckianos e cosmologia inflacionária

A cosmologia inflacionária é um elegante paradigma que resolve alguns problemas da cosmologia padrão:

- o problema da homogeneidade do universo.
- porquê a radiação cósmica de fundo é extremamente isotrópica.
- a planitude espacial.
- provê um mecanismo físico causal para a formação de estruturas.

O gráfico ilustra bem esse último problema.

Entretanto, o mesmo mecanismo que nos explica com grande sucesso a geração causal das flutuações cosmológicas traz consigo um problema "transplanckiano".

Observemos o gráfico outra vez. Se a inflação durar apenas um pouco mais do que o mínimo que ela precisa durar para resolver o problema do horizonte e com isso prover um mecanismo causal para a geração das flutuações da RCFM, então o comprimento de onda físico correspondente a essas flutuações será menor que o comprimento de Planck ($\sim 10^{-35}\ m$) no início do período inflacionário.

Mas as teorias de campo que descrevem a gravidade e a matéria não devem funcionar bem nas escalas trans-planckianas. Então perguntamos: as previsões da cosmologia inflacionária padrão são robustas contra os efeitos transplanckianos?

O mecanismo pelo qual as flutuações cosmológicas são criadas pode ser escrito muito resumidamente da seguinte maneira:

$$\ddot{v_k} + \left(k^2 - \frac{\ddot{z}}{z}\right)v_k = 0,$$

onde v_k é um campo escalar que expressa as flutuações e $\frac{\ddot{z}}{z}$ é um termo de massa.

Essa equação é análoga à equação de movimento do oscilador harmônico com massa dependente do tempo e resolve-se de maneira também análoga.

4.1 Análise transplanckiana: relações de dispersão modificadas

A maneira mais simples de modelar os possíveis efeitos transplanckianos é alterar a simples relação de dispersão $w_{fis} = k_{fis}$ por algo mais complicado $w_{fis} = w_{fis}(k)$ na equação acima.

Com essa nova relação, a evolução dos modos das flutuações é feita em três fases:

- Fase I: comprimento de onda é menor que o comprimento de Planck. Os efeitos transplanckianos têm papel importante.
- Fase II: comprimento de onda maior que o comprimento de Planck porém menor que o raio de Hubble. Os efeitos transplanckianos são desprezíveis e a solução para o campo v_k é oscilatória. Não existe criação de partículas nessa fase.
- Fase III: começa quando os modos ultrapassam o raio de Hubble. As flutuações se "congelam" e temos a geração das perturbações cosmológicas clássicas.

A questão é que temos uma radiação cósmica de fundo, radiação que percorre o universo desde os tempos imemoriais do desacoplamento, mais ou menos 350 mil anos após o Big Bang. A análise desses dados experimentais nos dá o que se chama de espectro. Acredita-se que os efeitos transplanckianos podem ter deixado sua marca nessa radiação, de alguma maneira, no espectro. Assim, alterando as relações de dispersão, podemos calcular o espectro teórico e comparamos com o experimental.

Mas no fim, uma crítica que se faz ao método descrito acima é que essas relações de dispersão são completamente "ad hoc", ou seja, não têm bases sólidas na física transplanckiana.

Então, devido ao "redshift" exponencial dos comprimentos de onda, as escalas cosmológicas que observamos hoje foram originadas, no início da inflação, com comprimentos de onda menores que o comprimento de Planck. Assim, pode-se obter informações sobre esse período nos espectros das anisotropias da RCFM, ou seja, talvez tenhamos efeitos mensuráveis em observáveis cosmológicos.

5 Relatividade Especial

Esse tópico ainda continua sendo estudado nesse momento.