Relatório de Iniciação Científica

Marcio Guilherme Bronzato de Avellar

1 Introdução

Evidências observacionais indicam que o universo sofreu um brevíssimo período de expansão acelerada nos primeiros instantes de sua existência, denominada fase inflacionária. Durante essa fase, efeitos quânticos são responsáveis por um eficiente mecanismo de criação de partículas que ficam registradas nas anisotropias da radiação cósmica de fundo. Esse mecanismo ocorre provavelmente em escala de energia próximo de 10^{16} GeV (escala da grande unificação de forças). Note que essa energia está muito perto da escala de energia de planck (10^{19} GeV), na qual a gravitação precisa ser quantizada. Nessas escalas, a teoria de gravitação de Einstein não funciona.

Nesse projeto investigaremos a robustez do mecanismo quântico de criação de partículas em situações extremas, isto é, altas energias. Para isso, estudaremos a teoria da relatividade geral e suas soluções cosmológicas. Em seguida, teoria das perturbações relativísticas e teoria canônica de campos em espaços curvos.

2 Andamento do projeto

Esse semestre foi dedicado ao estudo da cosmologia, pelo livro do Matts Roos "Introduction to Cosmology". Também contou com participação nos "Journal Club de Cosmologia" do departamento de Física Matemática, organizado por Luis Raul Weber Abramo, orientador.

Assim, foram estudados os tópicos:

2.1 De Newton a Hubble

2.1.1 Cosmologia pré-relativística

O Princípio Cosmológico (ou copernicano):"O universo é aproximadamente homogêneo e isotrópico no espaço tri-dimensional, sempre foi e assim será para sempre". Esse princípio nasceu da idéia que os observadores em qualquer lugar do espaço vêem as mesmas propriedades da matéria. E difícil dizer com precisão em que escala esse princípio é válido.

Newton formulou uma cosmologia baseado em sua teoria de gravitação. Nela, o universo colapsaria em um ponto central da distribuição de matéria num sistema finito. Mas esse efeito não era observado e Newton pensou que a atração mútua num sistema finito de estrelas seria compensada pela atração de um número finito, mas suficiente, de estrelas distribuídas fora desse sistema, num espaço infinito.

Leibnitz também formulou sua própria cosmologia, mas ao contrário de Newton, ele dizia que o número de estrelas devia ser infinito senão o universo seria limitado e teria um centro, contrariamente a filosofia da época.

Descrições dos movimentos galáticos; o sistema solar é tirado de centro do universo. Houve quebra no modelo antropocêntrico quando Shapley estudou a distribuição de aglomerados globulares, mostrando que havia um pico de distribuição na direção de Sagitário, fora do plano da nossa galáxia. Isso deslocou o sistema solar para a rabeira da *Via lactea*.

Por fim, o modelo antropocêntrico foi completamente destruído quando ficou demonstrado por Baade em 1952 que a *Via lactea* é uma galáxia de tamanho médio que não é excepcioanal nem central.

2.1.2 Referenciais inerciais

Da lei da inércia de Newton vem que se não houver forças atuando sobre um corpo num dado sistema, este estará em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Tais referenciais são chamados inerciais. Porém, para Newton, os cenceitos de 'em repouso' e 'em movimento' se referiam a um espaço absoluto que, apesar de não ser observável, existia fisicamente independentemente da espécie humana.

Ernst Mach criticou as idéias de Newton sobre referenciais inercias absolutos dizendo que as leis da física deviam ser baseados somente em conceitos que podem ser relacionados com observações. Ele fixou um sistema de referência nas estrelas fixas.

As leis da física devem ser da mesma forma e descritas em termos de 'invariantes' que assumem o mesmo valor em todos os referenciais inercias pelas transformações de Lorentz e a relatividade especial. Mas os intervalos de tempo dt e a distância pitagoreana ds não são invariantes sob as tranformações de Lorentz.

2.1.3 Paradoxo de Olber

'Por quê o céu noturno é escuro se existem infinitas estrelas distribuídas homogeneamente por um espaço infinito?' O paradoxo é posto da seguinte forma: as estrelas devem encher todo o campo de visão do céu e por isso este seria tão claro quantà superfície solar e estaríamos mergulhados num banho térmico com a temperatura da superfície do sol. Olber explicou primeiramente que esse efeito não acontecia porque existia poeira no meio interestelar capaz de absorver essa radiação luminosa. Isso é falso. Caso contrário, existiria tanta poeira que até mesmo o sol estaria obscurecido. Também, a radiação ficaria quente o suficiente para emitir em infravermelho.

Há algumas explicações mais razoáveis hoje em dia. Lord Kelvin foi o primeiro a dar uma explicação consistente: ele invocou o que se chama de caminho médio dos fótons (ou distância radial média entre as estrelas), que é a distância percorrida pelo fótons até ser absorvido por meio de colisões com outros. Chega-se à probabilidade P(r) que a distância para a primeira colisão seja r, dada por

$$f(r_*) = \int_0^{r_*} l^{-1} e^{-\frac{r}{l}} dr = 1 - e^{-\frac{r_*}{l}}$$

onde l^{-1} é a taxa de colisão por unidade de distância, constante.

Ou seja, para um universo infinito, a probailidade seria 100 % e a noite seria clara como a superfície solar. Como não é o caso, a razão r*/l deve ser pequena, indicando que o volume do universo observável hoje em dia é muito pequeno para conter suficientes estrelas.

Há ainda uma explicação um tanto mais simples: as estrelas têm vida finita, o que significa que elas não brilham para sempre, enquanto que a idade do universo pode ser infinita ou não. Ora, enquanto o tempo passa, a luz de estrelas novas chega até nós, a luz de estrelas velhas somem.

O efeito que a expansão do universo causa no comprimento de onda da luz (redshift) também poderia ser usado para explicar esse paradoxo.

2.1.4 Lei de Hubble

Nos anos de 1920 Hubble derivou o que hoje se chama Lei de Hubble, dada pela expressão $v = H_0 r$, onde v é a velocidade do objeto, r sua distância e H_0 é a constante de Hubble (atuais medidas indicam $H_0 = 71(2) km/sMpc$, sendo $1Mpc = 3,085 \cdot 10^{22} m$). Essa pequena fórmula teve profundas implicações para toda a visão que se tem do universo atualmente e principalmente abalou a crença de sua época: universo estático.

Essa lei nos diz que o universo inteiro se move, se expande como um todo, numa escala de centenas de Mpc's. Se o princípio cosmológico for válido, todos os observadores, independente da posição, verá as galáxias se afastarem dele.

Deve ser observado que o parâmetro de Hubble tem unidades de inverso de tempo, sendo assim um limite superior para a idade do universo nos modelos cosmológicos padrão, τ_h. Também se define como raio de Hubble a distância que a radiação com velocidade c percorre após o intervalo de tempo τ_h.

Usando a expressão

$$1 + z = \frac{(1 + \frac{v}{c})}{(1 - (\frac{v}{c})^2)^{1/2}}$$

e a lei de Hubble chega-se à

$$z = H_0 \frac{r}{c}$$

para z muito menor que 1. Como objetos se movendo à velocidade da luz têm 'redshift' infinito e objetos à distância do raio de Hubble estão se movendo a essa velocidade, vemos que nenhuma informação pode chegar até nós de objetos mais distantes que o raio de Hubble.

Para medir o universo, entretanto, é conveniente usar o fator cósmico de escala, ou simplesmente o fator de escala S. Por causa de expansão, o comprimento de onda λ de luz emitida a t menor que t_0 deve ser escalado ao tempo t_0

$$S(t) \approx S_0 - \dot{S}(t_0)(t_0 - t)$$

2.2 Leis de gravitação

2.2.1 Expansão no mundo newtoniano

Um sistema de corpos massivos sob o potencial gravitacional newtoniano se contrai ao invés de se expandir. Entretanto, o universo como um todo, em larga escala, se expande. Esse fato não contradiz a lei de gravitação.

A grande questão em cosmologia é saber se o universo como um todo é um sistema gravitacionalmente ligado, no qual a expansão parará um dia.

Considere uma galáxia de massa gravitacional m_g localizada sobre o raio de uma esfera de densidade média ρ e massa $4\pi r^3\rho/3$. O potencial gravitacional sobre a galáxia é

$$U = -\frac{GMm_g}{r} = -\frac{4\pi}{3}GMm_g\rho r^2$$

onde G é a constante de gravitação, expressando a força da interação gravitacional.

A galáxia, então, adquire uma aceleração

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} = -\frac{4\pi}{3}G\rho r$$

e a energia total do sistema, em termos da lei de Hubble é :

$$E = T + V = mr^2(\frac{H_0^2}{2} - \frac{4\pi G\rho}{3})$$

e definimos

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

que é a densidade de massa necessária para que a expansão pare.

Como r e r_0 são dependentes do tempo e não sabemos o raio do universo ao certo, é conveniente expressar a expansão em termos do fator de escala:

$$\dot{S}^2 = S_0^2H_0^2(1 - \Omega_0 + \Omega_0\frac{S_0}{S})$$

onde o índice zero indica os valores medidos hoje em dia e Ω_0 é o parâmetro de densidade. Durante a expansão, $\dot{S}$ é positivo e durante a contração, $\dot{S}$ é negativo. Isso implica

$$\Omega_0\frac{S_0}{S(t)} - \Omega_0 + 1 \geq 0$$

Existem três possibilidades. Se $\Omega_0 < 1$, o universo se expandirá para sempre, uma vez que está se expandindo hoje; o universo é aberto. Se $\Omega_0 = 1$, o universo se expandirá e em t = ∞ a expansão pára e assim permenecerá; o universo também é aberto. Se $\Omega_0 > 1$, o universo se expandirá até um limite S_{max} e depois de contrairá; o universo é fechado. Medidas atuais de Ω_0 são da ordem Ω_0 = 1.02 +/- 0.02 (WMAP).

2.2.2 A métrica do espaço-tempo

Na época de Newton acreditava-se as leis da física operavam em um espaço euclidiano plano, com o tempo sendo um parâmetro absoluto. Riemann mostrou que a geometria euclidiana era apenas uma escolha particular para um espaço plano, mas não necessariamente a correta para o espaço em que vivemos. Mach, pouco depois concluiu que o conceito de espaço absoluto teria que ser abandonado. Por fim, Einstein nos deu o cenário em que o espaço 3-D euclidiano plano deveria ser substituído pelo espaço 4-D de Minkowski, no qual as quantidades físicas eram descritas por invariantes.

A métrica de Minkowski descreve o espaço tempo em quatro coordenadas, sendo três espaciais e uma temporal (o tempo é uma dimensão nesse cenário). A métrica

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 = c^2dt^2 - dR^2 - R^2d\theta^2 - R^2sin^2\theta d\phi^2$$

descreve o espaço-tempo plano de Minkowski em coordenadas esféricas. Essa métrica, no entanto, descreve uma 2-esfera embebida num espaço 3D mais a dimensão temporal.

A questão é que observamos três coordenadas espaciais, o que implica que nosso espaço deve ter uma dimensão a mais que uma 2-esfera. Assim, vivemos numa 3-esfera(hiper-esfera) embebida num 4-espaço euclidiano, onde inserimos uma quarta dimensão espacial (fictícia). Em coordenadas esféricas, a nova métrica fica:

$$dl^2 = \frac{S^2dR^2}{S^2 - R^2} + R^2d\theta^2 + R^2sin^2\theta d\phi^2$$

Chega-se à métrica derivada por Howard Robertson e Arthur Walker em 1934

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 = c^2dt^2 - S^2\Big(\frac{d\sigma^2}{1 - k\sigma^2} + \sigma^2d\theta^2 + \sigma^2sin^2\theta d\phi^2\Big)$$

onde σ=R/S e k é o parâmetro de curvatura que pode assumir os valores 0, 1 ou -1, o que corresponde 3-espaço plano (universo aberto), a uma 3-esfera (universo fechado) e a um 3-hiperbolóide (universo aberto) respectivamente. Se k=0, obtemos novamente a métrica do espaço plano de Minkowski.

A métrica de Robertson-Walker carrega uma importante implicação: se em algum tempo um universo com essa métrica era homogêneo e isotrópico, esse universo continuará homogêneo e isotrópico, porque uma galáxia no ponto (σ, θ, ϕ) continuará sobre esse ponto. O que muda com o tempo é o fator de escala.

2.2.3 O princípio da covariância

O modo mais geral de escrever uma métrica é:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é uma matriz 4x4 chamada tensor métrico que é, grosso modo, uma quantidade de dois ou mais índices que percorrem todas as dimensões de um 'manifold'.

Embora a segunda lei de Newton seja invariante sob as transformações de Lorentz para qualquer referencial inercial, ela não é invariante quando tratamos de referenciais acelerados. É necessário que a segunda lei seja invariante, a fim de que todos os observadores em referenciais acelerados possam concordar sobre o valor da aceleração.

2.2.4 O princípio da equivalência

O princípio da equivalência diz que *para um observador em queda livre num campo gravitacional, os resultados de todos os experimentos locais são completamente independentes da magnitude do campo.* Foi baseado nesse princípio que Einstein começou a formular a teoria da relatividade geral que conecta o campo gravitacional com a geometria do espaço-tempo.

2.2.5 A teoria de gravitação de Einstein

Levando em conta que nosso universo não é plano, exceto local e aproximadamente, Einstein combinou o princípio da equivalência com os requerimentos do [princípio da covariância concluindo que o campo gravitacional inomogêneo nas proximidades de um corpo massivo é equivalente a um espaço-tempo curvo. Assim, as leis da natureza devem ser descritas por equações tensoriais geralmente covariantes.

Dessa forma Einstein chegou à sua famosa fórmula covariante da lei da gravitação universal:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein e $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia.

2.3 Modelos cosmológicos

2.3.1 A solução de Schwarzchild e buracos negros

Seja uma estrela única no universo, livre de quaisquer outras influências gravitacionais. A métrica do espaço-tempo é, então, deformada pela massa da estrela. Como o campo gravitacional varia com a distância r do centro da estrela, a métrica fica:

$$dl^2 = B(r)c^2dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2sin^2\theta d\phi^2$$

Como longe da estrela o universo deve ser plano, por hipótese, temos:

$$\lim_{r\to\infty} A(r) = \lim_{r\to\infty} B(r) = 1$$

Karl Schwarzchild estudou essa métrica e achou uma solução muito interessante:

$$A(r) = B(r)^{-1}$$

Define-se o raio de Schwarzchild como

$$r_c \equiv \frac{2GM}{c^2}$$

que tem o seguinte significado físico: r_c fixa o raio que uma estrela deve ter para que somente a luz escape de seu campo gravitacional. Para uma estrela de raio menor, nem mesmo a luz consegue escapar e temos o chamado Buraco Negro. rc ainda define o que se chama horizonte de eventos da estrela.

Assim, a métrica de Schwarzchild fica:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_c}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{r_c}{r}\right)^{-1}\frac{dr^2}{c^2}$$

É uma característica importante que dentro do raio de Schwarzchild o termo do tempo na métrica acima se torna negativo e os termos espaciais se tornam positivos. Isso significa que o espaço de torna "timelike" e o tempo se torna "spacelike". Não há mais relações causais entre dois eventos.

2.3.2 Cosmologias de Friedman

Em 1922, o físico e matemático russo Alexandr Friedman derivou algumas relações dinâmicas para o fator de escala:

$$\frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} = \frac{8\pi}{3}G\rho$$
$$\frac{2\ddot{S}}{S} + \frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} = -\frac{8\pi}{c^2}Gp$$

É importante notar que inerentemente às equações de Friedman está contido um universo em expansão, desacelerada, é bem verdade.

Einstein, em 1917, introduziu em sua lei de gravitação uma constante invariante sob as tranformações de Lorentz, $\lambda g_{\mu\nu}$, que tornava o universo estático.

Introduzindo essa constante, as equações de Friedman ficam:

$$\frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} - \frac{\lambda}{3} = \frac{8\pi}{3}G\rho$$
$$\frac{2\ddot{S}}{S} + \frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} - \lambda = -\frac{8\pi}{c^2}Gp$$

A cosmologia descrita por essas equações é chamada Universo de Friedman-Lamaître-Robertson-Walker. Um valor positivo de λ nos dá uma força repulsiva contra o potencial gravitacional. Um valor negativo, uma força atrativa, a favor do potencial. Para um valor ajustado para anular a gravidade temos o Universo de Einstein.

2.3.3 Cosmologias de de Sitter

Há outro caso especial da resolução das equações de Einstein. Este, seria considerar um universo plano (k=0) e homogêneo com a métrica de Robertson-Walker e com a densidade de matéria constante $\rho(t) = \rho_0$.

As equações de Friedman ficam, incluindo a constante cosmológica λ:

$$\frac{\dot{S}(t)}{S(t)} = H = \left(\frac{8\pi}{3}G\rho_0 + \frac{\lambda}{3}\right)^{1/2}$$

A solução dessas equações é um universo que se expande exponencialmente

$$S(t) \propto \exp^{Ht}$$

com métrica

$$ds^2 = c^2dt^2 - \exp^{2Ht}(d\sigma^2 + \sigma^2 d\theta^2 + \sigma^2 sin^2\theta d\phi^2)$$

Isso significa que se pusermos duas partículas num universo de de Sitter vazio, elas se afastarão exponencialmente. A força que guia o movimento relativo entre essas duas partículas é muito estranha. Seja rS a distância espacial que separa as duas partículas e λ positivo. A equação de movimento (incluindo λ) é:

$$\frac{d^2(rS)}{dt^2} = \frac{\lambda}{3}rS - \frac{4\pi}{3}G(\rho + 3pc^{-2})RS$$

Universos com expansão exponencial são chamados inflacionários. Partimos da hipótese de um universo plano, mas existem soluções desse tipo mesmo para universos curvos, produzindo:

$$S(t) \propto H^{-1}cosh(H \cdot t)$$

para universo fechado e

$$S(t) \propto H^{-1}sinh(H \cdot t)$$

para universo aberto.

As métricas para esses universos ficam assintoticamente iguais à anterior, mas com os novos S(t) no lugar de $\exp(Ht)$.

2.4 Termodinâmica

2.4.1 Fótons

A radiação eletromagnética tem uma descrição dual: uma onda de comprimento lambda e frequência $\nu = \lambda/c$ ou como quanta de energia, chamados fótons. O trabalho de Einstein de 1905, o efeito fotoelétrico, mostrou que a energia é quantizada e cada quantum tem energia

$$E = h\nu$$

No início da história do universo, havia um estado de extremo calor e pressão, ocupando um pequeno volume. Nessa época a maior parte da densidade da energia do universo vinha da pressão da radiação. Essa é a chamada Era da Radiação. Não havia átomos e nem mesmo os núcleos atômicos haviam se formado. Existiam apenas as partículas e subpartículas que viriam a formar a matéria e também suas antipartículas. Após muitas colisões, havia um equilíbrio térmico e os fótons, então, exibiram um espectro de corpo negro.

Seja $n_\gamma(\nu)$ o número de fótons de energia $h\nu$ por unidade de volume e frequencia. Então temos a densidade de fótons

$$n_\gamma(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{3}\frac{\nu^2 d\nu}{\exp^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

que nos leva a densidade total de energia da radiação (lei de Stefan-Boltzman):

$$\varepsilon_\gamma = \int_0^\infty h\nu n_\gamma(\nu)d\nu = \frac{\pi^2 k^4 T^4}{15\hbar^3 c^3} \equiv aT^4$$

Note que o equilíbrio térmico é caracterizado apenas pela temperatura.

2.4.2 Expansão adiabática

Considere um sistema fechado com energia $E = \varepsilon V$ e pressão p com volume esférico dado por $4\pi S^3/3$ (S é o fator de escala cosmológico) que se expande adiabaticamente. Pela segunda lei da termodinâmica, para o sistema em equilíbrio a temperatura T:

$$ds = \frac{1}{kT}[d(\varepsilon V) + pdV]$$

onde ds é o incremento na entropia.

Pela condição de adiabaticidade, uma mudança no volume teria que ser compensado por uma mudança na energia à pressão e entropia constantes:

$$\dot{s} = 0$$
$$dE = -pdV$$

Assumindo que o universo pode ser tratado como um fluido não viscoso, as considerações acima podem ser aplicadas ao universo, durante a era da radiação e durante o início da era da matéria, antes das galáxias se formarem.

Assim temos algumas relações importantes:
densidade de energia da radiação: $\varepsilon_r = \frac{h\nu}{V} = \frac{hc}{V\lambda} \sim S^{-4}$
pressão: $p = \frac{1}{3}\varepsilon \sim S^{-4}$
densidade de energia da matéria: $\varepsilon_m = \rho c^2 = \frac{Mc^2}{V} \sim S^{-3}$

2.4.3 A era da radiação

2.4.4 O tempo do desacoplamento

As considerações feitas até aqui sobre quais partículas participam do equilíbrio térmico depende de duas escalas de tempo: a taxa de reação da partícula em questão e a taxa de expansão do universo. Se a taxa de reação for muito lenta frente a taxa de expansão, será muito difícil que partículas se combinem.

Em determinado momento na história do universo, havia muitos fótons e léptons. Existindo elétrons (relativístico) e fótons, há interação eletromagnéticas entre eles. Os fótons vão sofrer espalhamento. Enquanto os elétrons estiverem rápidos demais, os fótons não caminharão em linha reta por grandes distâncias e o resultado disso é que o universo é opaco à radiação eletromagnética. É impossível obter informações dessa época diretamente. Nada pode ser visível.

Conforme o universo se expande e esfria, os elétrons vão ficando mais lentos e podem ser capturados por prótons o que leva à formação de átomos de hidrogênio. Quando esse processo termina, os fótons não podem mais sofrer espalhamento e o universo se torna visível. Estamos na fronteira da última superfície de espalhamento, quando o universo esfriou de 5000K para 3000K.

Essa fronteira está a uma distância radial de redshift z=1100. Como o esfriamento não foi instantâneo, essa superfície tem uma largura de $\Delta z \sim 0.07z$. O tempo do desacoplamento é aproximadamente 350000 anos após o Big Bang.

A cosmologia do Big Bang faz as seguintes predições: os fótons dessa época ainda devem estar percorrendo o universo, o que é verificado: a radiação cósmica de fundo. Também prediz a isotropia dessa radiação.