1 Regras de Feynman para QED

Decaimentos e espalhamentos que geram duas partículas no estado final são descritas da seguinte maneira no CM:

$$\Gamma = \frac{|\vec{p}_f|}{32\pi^2 s} \int \langle |\mathscr{M}|^2 \rangle \mathtt{d}\Omega \tag{1}$$

onde s é a energia do centro de massa; e

$$\frac{\mathtt{d}\sigma}{\mathtt{d}\Omega} = \frac{\langle |\mathscr{M}|^2 \rangle}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} \tag{2}$$

essas expressões são válidas quando adotamos o CM como referencial, mas o resultado é invariante de Lorentz.

Tanto na equação (1) quanto na (2) é necessário saber o valor de $\langle |\mathscr{M}|^2 \rangle$ para obter as medidas de maior interesse (σ e Γ). Por isso, existe um método desenvolvido por Feynman para determinar a amplitude de um espalhamento. Primeiro devemos desenhar o diagrama de Feynman que corresponde ao espalhamento em questão, depois executamos os seguintes passos:

- *Notação*: A cada linha externa associe um momento p_n, e a cada linha interna associe um momento q_n.
- *Linhas externas*: Estabeleça a seguinte legenda:

  férmions $\begin{cases} \text{“entrando”: } u \\ \text{“saindo”: } \bar{u} \end{cases}$

  antiférmions $\begin{cases} \text{“entrando”: } \bar{v} \\ \text{“saindo”: } v \end{cases}$

  fótons $\begin{cases} \text{“entrando”: } \epsilon_\mu \\ \text{“saindo”: } \epsilon_\mu * \end{cases}$
- **Fatores de vértice**: Cada vértice contribui com um fator $ie\gamma^\mu$, onde $e = \sqrt{4\pi\alpha}$ é a constante de acoplamento da interação eletromagnética e γ^μ é uma matriz de Dirac.
- **Propagadores**: Cada linha interna contribui com um fator:

  férmions e antiférmions: $\frac{i(\gamma^\mu q_\mu + mc)}{q^2 - (mc)^2}$

  fótons: $\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$
- *Conservação de momento e energia*: Para cada vértice escreva a função delta de Dirac na forma

  $$(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3)$$

  onde os *k's* são os quadrimomentos que formam o vértice (positivos para partículas ”entrando“ e negativas para partículas ”saindo“).

- *Integrar sobre os momenta internos*: Para cada momento interno q escreve-se o fator $\frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4}$ e integra-se.

- *Cancelar a função Delta remanescente*: No resultado final restará um fator $(2\pi)^4\delta(p_1+p_2+\cdots-p_n)$ que corresponde à conservação do momento e da energia do processo. Cancele esse fator e multiplique por i. O resultado é a amplitude $\mathscr{M}$.

- *Somar as amplitudes*: Caso o processo seja representado por mais de um diagrama, a amplitude total corresponderá à soma das amplitudes individuais dos diagramas.

- *Antisimetrização*: Se dois diagramas de um mesmo processo diferem por uma permutação de férmions, então as amplitudes desses diagramas em questão devem ser subtraídas.

Essa é a regra de Feynman para determinação de $\mathscr{M}$ na QED. Os fatores γ correspondem às matrizes de Dirac:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

onde 1 denota a matriz identidade 2×2, 0 é a matriz nula 2×2, e σ^i $(i = 1, 2, 3)$ é uma *matriz de Pauli*.

As matrizes (3) têm essa configuração porque a partir da relação relativística de energia-momento temos:

$$\begin{aligned} p_\mu p^\mu - (mc)^2 = 0 &\Rightarrow (\beta^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) = 0 \\ p_\mu p^\mu - (mc)^2 &= \beta^\kappa\gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - mc(\beta^\kappa - \gamma^\kappa)p_\kappa - (mc)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

mas não há termos lineares, então $\beta^\kappa = \gamma^\lambda$, e uma maneira de se ter $p^\mu p_\mu = \gamma^\kappa\gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda$ é admitindo que γ^μ seja dada por (3).

Substituindo $p_\mu \to i\hbar\partial_\mu$ e escolhendo $\gamma^\lambda p_\lambda - mc = 0$ em (4), concluiu-se:

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0 \tag{5}$$

que é a *equação de Dirac*, utilizada para descrever partículas relativísticas de spin 1/2 (férmions). O elemento ψ na equação (5) é um espinor de Dirac e, apesar de possuir 4 componentes, não é um quadrivetor. Na legenda estabelecida acima para as linhas externas do diagrama de Feynman, u e v são espinores de Dirac, enquanto ϵ_μ são vetores de polarização, essenciais na representação de elétrons, pósitrons e fótons como função de onda. Elétrons e pósitrons (partículas de spin 1/2) são soluções de (5).

Elétron	Pósitron
$\psi(x) = ae^{-(i/\hbar)p\cdot x}u^{(s)}(p)$	$\psi(x) = ae^{(i/\hbar)p\cdot x}v^{(s)}(p)$

Fóton

$$A_\mu(x) = ae^{-(i/\hbar)p\cdot x}\epsilon_\mu^{(s)}$$

onde $s = 1, 2$ para os dois estados de spin (ou polarização) e p é o quadrimomento.

Partículas de spin 0 são descritas pela *equação de Klein-Gordon*:

$$\hbar\partial^\mu\partial_\mu\psi + (mc)^2\psi = 0 \tag{6}$$

Para se chegar em (6) basta partir da relação relativística $p_\mu p^\mu - (mc)^2 = 0$ e substituir $p_\mu \to i\hbar\partial_\mu$.

Para não carregar muitos índices ao longo dos cálculos de amplitude adotamos a seguinte notação:

$$a^\mu\gamma_\mu = \not{a}$$

Dessa maneira, aplicando a regra de Feynman aos diagramas do espalhamento Compton de primeira ordem, representados na figura 1, obtemos:

$$\mathscr{M}_1 = \frac{e^2}{(p_1 - p_3)^2 - (mc)^2}[\bar{u}(4)\not{\epsilon}(2)(\not{p}_1 - \not{p}_3 + mc)\not{\epsilon}(3)^* u(1)] \tag{7}$$

$$\mathscr{M}_2 = \frac{e^2}{(p_1 + p_2)^2 - (mc)^2}[\bar{u}(4)\not{\epsilon}(3)(\not{p}_1 + \not{p}_2 + mc)\not{\epsilon}(3)^* u(1)] \tag{8}$$

sendo a amplitude total igual a $\mathscr{M} = \mathscr{M}_1 + \mathscr{M}_2$.

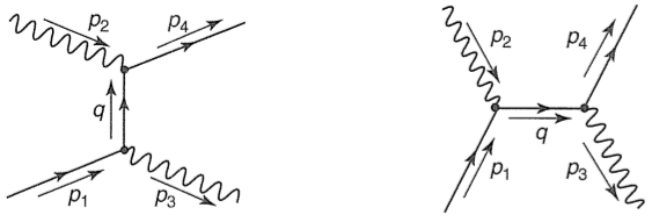

Figura 1: *Os dois diagramas de primeira ordem do espalhamento Compton.*

Portanto, desde que se especifiquem os quadrimomentos p, os spins dos elétrons e as polarizações dos fótons, basta encontrar os espinores u e ϵ e substituir em (7) e (8) para encontrar a amplitude do espalhamento e, a partir deste, usar (1) e (2).

2 Regras de Feynman para QCD

A partir daqui vamos adotar o sistema de unidades naturais, isto é, $\hbar = c = 1$, pois simplifica a notação.

Para calcular a amplitude de espalhamento na QCD precisamos conhecer as regras de Feynman dessa teoria.

Os termos dos possíveis vértices que aparecem no cálculo de $\langle|\mathscr{M}|^2\rangle$ são:

- **glúon-quark**: $ig\gamma^\mu t^a$
- **glúon-glúon-glúon**: $gf^{abc}[g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu]$ onde p, q e k são os quadrimomentos dos glúons (por convenção, considera-se que todos os quadrimomentos apontam para dentro do vértice) e f^{abc} são as *constantes de estrutura* da álgebra de $SU(3)_c$:

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right] = if^{abc}\frac{\lambda_c}{2} \tag{9}$$

  onde $\lambda_i/2$ são os geradores de $SU(3)$, as matrizes de Gell-Mann.

- **glúon-glúon-glúon-glúon:**

$$\begin{aligned} -ig^2 \quad [\quad & f^{abe}f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\ + \quad & f^{ace}f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\ + \quad & f^{ade}f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}) \quad] \end{aligned}$$

O propagador é obtido pela identificação da equação de Green no espaço de fases (no gauge de Feynman):

$$\langle A^a_\mu(x)A^b_\nu(x')\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\tilde{G}(k)e^{-ik\cdot(x-x')} \tag{10}$$

para a QCD:

$$\tilde{G}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2}\delta^{ab} \tag{11}$$

A partir desses resultados é possível obter o $\langle|\mathscr{M}|^2\rangle$ para então calcular a largura de decaimento Γ e a seção de choque σ a partir das expressões gerais (1) e (2).

3 Regras de Feynman para GWS

Reescrevendo as interações carregadas em função de $j^\pm_\mu = j^1_\mu \pm ij^2_\mu$ teremos:

$$-ig\left(j^1_\mu(W^1)^\mu + j^2_\mu(W^2)^\mu\right) = \frac{-ig}{\sqrt{2}}\ \left(W^+_\mu\ j^{+\ \mu} + W^-_\mu\ j^{-\ \mu}\right) \tag{12}$$

e usando o fato que $j^+_\mu = \bar{\chi}_L\ \gamma_\mu\ \sigma^+\ \chi_L$ e $j^-_\mu = \bar{\chi}_L\ \gamma_\mu\ \sigma^-\ \chi_L$, ficamos com:

$$\begin{gathered} \tfrac{-ig}{\sqrt{2}}\ \left(W^+_\mu\ \ \bar{\chi}_L\ \gamma^\mu\ \sigma^+\ \chi_L\ +\ W^-_\mu\ \ \bar{\chi}_L\ \gamma^\mu\ \sigma^-\ \chi_L\right) \\ \tfrac{-ig}{2\sqrt{2}}\ \left(W^+_\mu\ \ \bar{\chi}\ \gamma^\mu\ (1-\gamma^5)\ \chi\ +\ W^-_\mu\ \ \bar{\chi}\ \gamma^\mu\ (1-\gamma^5)\ \chi\right) \\ \bar{\chi}\ \left(\tfrac{-ig}{2\sqrt{2}}\ \gamma^\mu\ (1-\gamma^5)\right)\ \chi\ W^+_\mu\ +\ \ \bar{\chi}\ \left(\tfrac{-ig}{2\sqrt{2}}\ \gamma^\mu\ (1-\gamma^5)\right)\ \chi\ W^+_\mu \end{gathered} \tag{13}$$

então:

- **fator de vértice das interações fracas carregadas**: $\frac{-ig}{2\sqrt{2}}\ \gamma^\mu\ (1-\gamma^5)$

Quanto às interações fracas neutras, o fator de vértice é obtido substituindo as já conhecidas equações:

$$j_\mu^{em} = \bar{\psi}\ \gamma_\mu\ Q\psi \tag{14}$$

e

$$j_\mu^3 \equiv \bar{\chi}_L\ \gamma_\mu\ \frac{\sigma_3}{2}\ \chi_L = \frac{1}{2}(\bar{\nu}_L\ \gamma_\mu\ \nu_L - \bar{e}_L\ \gamma_\mu\ e_L) \tag{15}$$

em

$$-\,i(g\cos\theta_w j_\mu^3 - g'\sin\theta_w j_\mu^Y)Z^\mu = -i\frac{g}{\cos\theta_w}(j_\mu^3 - \sin^2\theta_w j_\mu^{em})Z^\mu \tag{16}$$

$$\frac{-ig}{\cos\theta_w}(j_\mu^3 - \sin^2\theta_w j_\mu^{em})Z^\mu = \frac{-ig}{\cos\theta_w}\bar{\chi}\ \gamma_\mu\left(\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\frac{\sigma^3}{2} - \sin^2\theta_w Q\right)\chi\ Z^\mu \tag{17}$$

ou seja,

- **fator de vértice das interações fracas neutras**: $\frac{-ig}{\cos\theta_w}\ \gamma_\mu\left(\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\frac{\sigma^3}{2} - \sin^2\theta_w Q\right)$

Por fim, o fator do propagador é dado por:

$$\textbf{propagador}:\ \frac{i(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/M^2)}{M^2 - k^2} \tag{18}$$