

# PROJETO PARA O CICLO AVANÇADO TÉCNICAS MODERNAS EM COMBINATÓRIA

LEONARDO NAGAMI COREGLIANO E YOSHIHARU KOHAYAKAWA

RESUMO. Este é o projeto de pesquisa para o Ciclo Avançado de Leonardo Nagami Coregliano, a ser desenvolvido sob a supervisão de Y. Kohayakawa, no Instituto de Matemática e Estatística, USP, no período de agosto de 2011 a junho de 2013 (4 semestres). Este projeto tem como áreas de concentração as áreas de algoritmos e de combinatória e a teoria da complexidade. Este trabalho envolverá o estudo de uma mescla de análise, álgebra, combinatória, algoritmos e certos aspectos da computação, tanto práticos como teóricos. Um dos objetivos do projeto é assegurar que o aluno obtenha uma formação mais profunda em certas áreas da matemática e da computação, para que ele possa ingressar em um programa de pós-graduação já com preparação específica. Ao se familiarizar o suficiente com os fundamentos e as técnicas necessárias, o aluno passará a estudar tópicos mais avançados: ele estudará técnicas modernas para se investigar grafos de grandes proporções, assim como estudará técnicas analíticas em combinatória.

## 1. INTRODUÇÃO, TEMA, OBJETIVOS E METODOLOGIA

O projeto para o Ciclo Avançado de Leonardo Nagami Coregliano terá como *tema* tópicos das áreas de *algoritmos, combinatória, e complexidade*. A literatura central inclui textos gerais e mais específicos das áreas de teoria dos grafos, combinatória e algoritmos: Bollobás [?], Diestel [?], Babai e Frankl [?], Alon e Spencer [?], Motwani e Raghavan [?], Cormen, Leiserson, Rivest, e Stein [?].

*Objetiva-se* um estudo de parte coerente e significativa da literatura acima, além da participação do aluno de alguns projetos específicos na parte avançada do projeto. Ao final do ciclo avançado, o aluno terá adquirido formação fundamental em certas áreas da matemática e da ciência da computação, e também terá estudado tópicos mais específicos, envolvendo combinatória e algoritmos.

O aluno adquirirá familiaridade com *métodos* de diversas áreas da matemática para o estudo de problemas combinatórios e algorítmicos, como, por exemplo, métodos algébricos, analíticos, probabilísticos, e topológicos, além dos métodos puramente combinatórios e da área de otimização.

## 2. TÓPICOS ESPECÍFICOS DE ESTUDO E PESQUISA

Listamos a seguir os tópicos específicos que o aluno estudará sob este projeto. Organizamos o material de acordo com a bibliografia fundamental, a saber, Bollobás [?], Babai e Frankl [?], Cormen, Leiserson, Rivest, e Stein [?]. (As demais referências citadas na Seção ?? serão de suporte.)

2.1. ***Modern Graph Theory*** (Bollobás [?]). Cobriremos parte substancial deste livro. Após o estudo dos capítulos iniciais (Capítulos I e III), o estudo será concentrado nos Capítulos IV–VIII, sobre problemas extremais, coloração, teoria de Ramsey, e grafos aleatórios.

O estudo de certos tópicos da teoria clássica dos grafos será baseado na monografia de Diestel [?].

2.2. ***Linear Algebra Methods in Combinatorics*** (Babai and Frankl [?]). Esta monografia inacabada será usada como a literatura de suporte para a área de combinatória. O foco deste

trabalho é a teoria extremal dos conjuntos, acessível por métodos algébricos elementares, com aplicações à geometria e à teoria da computação. Ilustrativos são o teorema de Kahn e Kalai [?], sobre a conjectura de Borsuk, e as aplicações à complexidade de comunicação. Outro exemplo ilustrativo fascinante da aplicação de métodos algébricos elementares é o trabalho de Dvir [?], sobre conjuntos de Kakeya em corpos finitos.

Através do estudo desta monografia, o aluno adquirirá familiaridade com a combinatória moderna em geral e com métodos algébricos essenciais. Nesta linha, outra pequena obra de bastante interesse é devido a Matoušek [?], que também será consultada em parte.

**2.3. *Introduction to Algorithms* (Cormen, Leiserson, Rivest, e Stein [?]).** Planejamos neste projeto o estudo de tópicos fundamentais da teoria de algoritmos e da teoria da complexidade computacional. Para tanto, o aluno cursará disciplinas apropriadas e também estudará alguns tópicos mais avançados, como algoritmos probabilísticos, análise de caso médio, algoritmos de aproximação, técnicas da análise harmônica para o estudo de funções booleanas e *property testing* [?]. Este livro será a bibliografia básica para os tópicos clássicos desta área.

**2.4. *Literatura adicional.*** Comentamos acima a bibliografia central deste projeto. Além dos trabalhos acima, servirão de suporte os livros *The Probabilistic Method*, de Alon e Spencer [?], e *Randomized Algorithms*, de Motwani e Raghavan [?]*—o primeiro tem foco em combinatória, enquanto que o segundo tem foco na área de algoritmos.*

### 3. TÓPICOS AVANÇADOS DE COMBINATÓRIA

Após o aluno adquirir uma base das áreas de teoria dos grafos, combinatória e algoritmos, ele concentrará seus esforços em duas vertentes mais avançadas: ele estudará aspectos modernos da teoria dos grafos de grandes proporções, seguindo uma resenha de Lovász [?], e ele também estudará avanços recentes na área de combinatória que foram obtidos através do uso de técnicas de análise de Fourier de funções booleanas, seguindo uma resenha de Kalai e Safra [?]. Discutimos brevemente as resenhas citadas acima nas duas seções a seguir.

**3.1. *Very Large Graphs* (Lovász [?]).** Esta resenha apresenta uma introdução à área de *limites de grafos*. Além de ser interessante em si, esta teoria de convergência de grafos levou a novas formas de se entender resultados clássicos da teoria assintótica dos grafos e da área de teste de propriedades. Grosseiramente falando, a idéia básica é aproximar grafos de grandes proporções por objetos contínuos. Dadas sequências ‘convergentes’ de grafos, definem-se os objetos limite correspondentes, chamados *graphons*, que são, simplesmente, funções mensuráveis simétricas  $W: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Técnicas analíticas clássicas (e também ferramentas da análise *não-standard*) tornam-se então disponíveis na investigação de grafos *de grandes proporções*.

**3.2. *Threshold Phenomena and Influence, with some Perspectives from Mathematics, Computer Science, and Economics* (Kalai e Safra [?]).** Os “threshold phenomena” mencionados no título desta resenha referem-se a situações em que a probabilidade de um dado evento ocorrer varia bruscamente com a variação de um parâmetro subjacente. Tais fenômenos têm um papel importante em probabilidade e estatística, física, e ciência da computação, assim como são

relacionados a tópicos estudados em economia e ciência política. Os objetos fundamentais aqui são as *funções booleanas*: funções  $f(x_1, \dots, x_n)$  que assumem valores booleanos (isto é, 0 ou 1), em que as variáveis  $x_i$  são também todas booleanas. Uma ferramenta matemática básica no estudo de ‘fenômenos limiares’ é a análise de Fourier de funções booleanas. Esta resenha discute tanto esta ferramenta como suas aplicações nas investigações de ‘comportamentos limiares’ e constitui uma excelente introdução à área de técnicas analíticas em combinatória.

## APÊNDICE A. PROPOSTA DE GRADE DE DISCIPLINAS DO CICLO AVANÇADO

A programação de disciplinas é como segue.

### A.1. Segundo Semestre de 2011

- MAC0242 - Laboratório de Programação II, graduação, 60h, 4 créditos
- MAC0331 - Geometria Computacional, graduação, 60h, 4 créditos
- MAC0414 - Linguagens Formais e Autômatos, graduação, 60h, 4 créditos,
- MAT0213 - Álgebra II, graduação, 90h, 6 créditos
- MAT0234 - Análise Matemática I, graduação, 60h, 4 créditos
- CCM0318 - Iniciação à Pesquisa I, graduação, 360h, 12 créditos

Total de créditos: 34 créditos (total geral: 34 créditos)

### A.2. Primeiro Semestre de 2012

- MAT0225 - Funções Analíticas, graduação, 60h, 4 créditos
- MAC0315 - Programação Linear, graduação, 60h, 4 créditos
- MAC0328 - Algoritmos em Grafos, graduação, 60h, 4 créditos
- MAC0338 - Análise de Algoritmos, graduação, 60h, 4 créditos
- MAT0334 - Análise Matemática II, graduação, 60h, 4 créditos
- CCM0328 - Iniciação à Pesquisa II, graduação, 360h, 12 créditos

Total de créditos: 32 créditos (total geral: 66 créditos)

### A.3. Segundo Semestre de 2012

- MAC0325 - Otimização Combinatória, graduação, 60h, 4 créditos
- CCM0418 - Iniciação à Pesquisa III, graduação, 360h, 12 créditos

Total de créditos: 16 créditos (total geral: 82 créditos)

### A.4. Primeiro Semestre de 2013

- MAT0313 - Álgebra III, graduação, 60h, 4 créditos
- CCM0428 - Iniciação à Pesquisa IV, graduação, 360h, 12 créditos

Total de créditos: 16 créditos (total geral: 98 créditos)

**A.5. Outras Disciplinas.** Além disso, dependendo do desenvolvimento do projeto e do oferecimento, poderão ser cursadas algumas das seguintes disciplinas da *graduação*:

1. MAC0239 - Métodos Formais em Programação
2. MAC0300 - Métodos Numéricos da Álgebra Linear
3. MAC0422 - Sistemas Operacionais
4. MAC0430 - Algoritmos e Complexidade de Computação
5. MAC0431 - Introdução à Computação Paralela e Distribuída
6. MAC0438 - Programação Concorrente
7. MAC0448 - Programação para Redes de Computadores
8. MAE0228 - Noções de Probabilidade e Processos Estocásticos
9. MAE0515 - Introdução à Teoria dos Jogos

10. MAP0413 - Equações de Derivadas Parciais
11. MAT0317 - Topologia
12. MAT0330 - Teoria dos Conjuntos
13. MAT0359 - Lógica

As seguintes disciplinas da *pós-graduação* também serão consideradas, dependendo do oferecimento:

1. MAC5771 - Teoria dos Grafos
2. MAC5727 - Algoritmos de Aproximação
3. MAC5775 - Métodos Probabilísticos em Combinatória e em Teoria da Computação I
4. MAC5776 - Métodos Probabilísticos em Combinatória e em Teoria da Computação II
5. MAC5827 - Tópicos em Matemática Discreta

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA, UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, RUA DO MATÃO 1010, 05508-090 SÃO PAULO, SP

*Endereços Eletrônicos:* [lenacore@gmail.com](mailto:lenacore@gmail.com), [yoshi@ime.usp.br](mailto:yoshi@ime.usp.br)